世界著名科学家传记

数学家 II

吴文俊 主编

科学出版社

世界著名科学家传记

数学家

II

吴文俊 主编



科学出版社

1992



内 容 简 介

《世界著名科学家传记·数学家》将分六集出版，收入世界最著名的数学家的传记100余篇．这是第二集．本集收入古希腊著名数学家阿基米德、欧几里得、阿波罗尼奥斯等人的传记 24 篇．作者在进行深入研究的基础上，对这些科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、准确的记述，并指明参考文献，即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料．读者不但可以从中了解到这些第一流科学家最深刻的研究工作、杰出成就和对科学的重大影响，而且还可以看到他们的成长道路，成功经验和思想品格，从而受到深刻的启迪．

世界著名科学家传记

数 学 家

II

吴文俊 主编

责任编辑　张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1992年 5 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1992年 5 月第一次印刷　　印张：9

印数：1—3 600　　字数：234 000

ISBN 7-03-002114-2/Z · 132

定价：7.90 元

《科学家传记大辞典》
数学学科编委会



前　　言

在中国科学院的领导下，科学出版社正在组织我国专家编纂一部大型的科学家传记辞典，计划收入古今中外重要科学家(包括数学家、物理学家、天文学家、化学家、生物学家、医学家、地质学家、地理学家，以及技术科学家即发明家和工程师等) 的传记约 8000 篇，字数估计为 2000 万．辞典将对所收科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、简洁、准确的记述，并附文献目录；即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料，特别是那些第一流科学家的最深入的研究工作和成功经验．其中将以足够的篇幅介绍我国古代和现代科学家的重大成就，以及他们为发展祖国的科学事业，不惧险阻，勇攀高峰的精神，以激励青年一代奋发图强，献身"四化"．这就是编纂这部《科学家传记大辞典》的基本目的．

大辞典总编委会由各科学领域的 60 余位著名学者组成，卢嘉锡同志担任主编，严东生、周光召、吴文俊、王绶琯、涂光炽、吴阶平、苏世生等同志担任副主编．1988 年 8 月，在北京召开了总编委会第一次会议，讨论了大辞典的编纂方针，制定了"编写条例"．各学科的编委会也已相继成立．在总编委会和各学科编委会的领导和组织下，编纂工作已全面展开．科学出版社设立了《科学家传记大辞典》编辑组，负责大辞典的编辑组织工作．

对于外国科学家，各学科编委会已分别确定第一批撰稿的最重要的科学家名单，共约 800 人，并已约请有关专家分头执笔撰稿．在大辞典出版之前，按不同学科，定稿每达 20—30 篇，就以《世界著名科学家传记》文集的形式及时发表．这些传记是在进行深入研究的基础上撰写的，又经过比较严格的审核，因而已具有较高的学术水平和参考价值．发表后广泛听取意见，以便将来收入大

辞典时进行必要的修改。

由于这部大辞典是我国编辑的，因而中国科学家辞条将占重要地位，应下大功夫认真撰写，关于中国古代（19 世纪以前）科学家的传记，计划收入 260 余篇，已委托中国科学院自然科学史研究所的专家组织撰写；中国现代科学家的传记，计划收入 600 余篇，正在由各学科编委会组织撰写。

编纂这部《科学家传记大辞典》，是我国科学文化方面的一项具有重大意义的基本建设；国家新闻出版署已将其列入国家重点辞书规划。这项工作得到了我国学术界的广泛支持。已有许多学者、专家热情地参加工作。他们认为，我国学术界对于科学史研究的兴趣正在与日俱增，只要充分调动中国科学院、各高等院校、各学术团体的力量，认真进行组织，花费若干年的时间，是完全可以编好这部辞典的。他们还认为，组织编写这部辞典，对于科学史的学术研究也是一个极大的促进。在编写过程中，对于尚未掌握的材料，还不清楚的问题，必须进行深入的研究，以任务促科研，有了成果，自然容易写出好文章。

编纂这样一部大型的辞典，涉及面广，要求质量高，工作量很大。这里，我们热切地希望有更多的热心这项事业的学者、专家参加工作，承担撰稿和审稿任务。

我们热烈欢迎广大读者对我们的工作提出宝贵意见。

《科学家传记大辞典》编辑组

目　　录

泰勒斯……………………………………………………梁宗巨（1）
毕达哥拉斯………………………………………………梁宗巨（11）
安纳萨戈拉斯……………………………………………王青建（27）
芝诺………………………………………………………周焕山（32）
安蒂丰……………………………………………………王青建（41）
希波克拉底………………………………………………王青建（46）
阿尔希塔斯………………………………………………王青建（55）
柏拉图……………………………………………………周焕山（62）
欧多克索斯………………………………………………周焕山（78）
门奈赫莫斯………………………………………………梁宗巨（85）
欧几里得…………………………………………………梁宗巨（93）
阿基米德…………………………………………………梁宗巨（123）
埃拉托塞尼………………………………………………梁宗巨（160）
阿波罗尼奥斯……………………………………………梁宗巨（168）
尼科米迪斯………………………………………………梁宗巨（188）
希帕霍斯…………………………………………………梁宗巨（193）
海伦………………………………………………………梁宗巨（201）
尼科马霍斯………………………………………………梁宗巨（216）
门纳劳斯…………………………………………………梁宗巨（224）
丢番图……………………………………………………梁宗巨（230）
帕波斯……………………………………………………梁宗巨（249）
赛翁………………………………………………………袁向东（261）
希帕蒂娅…………………………………………………袁向东（265）
普罗克洛斯………………………………………………梁宗巨（267）

附录　略论希腊数学………………………………………梁宗巨（273）

泰　勒　斯

梁　宗　巨
(辽宁师范大学)

泰勒斯(米利都的)(Thales of Miletus)约公元前625年生于伊奥尼亚的米利都,约公元前547年卒。自然哲学、数学、天文学。

泰勒斯是希腊最早的哲学学派(伊奥尼亚学派)的创始人,也是最早留名于世的数学家和天文学家. 伊奥尼亚(Ionia)包括小亚细亚(今属土耳其)西岸中部和爱琴海东部诸岛. 公元前1200年到前1000年间,希腊部落伊奥尼亚人迁移于此,因而得名. 在那里,氏族贵族政治为商人的统治所代替. 商人有强烈的活动性,为思想的自由发展创造了有利条件. 希腊没有特殊的祭司阶层,也没有必须遵守的教条,这大大有助于科学和哲学同宗教分离开来. 米利都(Miletus)是伊奥尼亚最繁盛的都市,位于门德雷斯(Menderes)河口,地居东西方交通的要冲,它比希腊其他地区更容易吸收巴比伦、埃及等古国累积下来的经验和文化.

泰勒斯生于米利都, 父亲艾克萨米斯(Examyes)是卡里亚(Caria)人,母亲克利奥布林(Cleobuline)有腓尼基(Phoenicia)的血统[1]. 泰勒斯的生年有两种说法, 根据第欧根尼(Diogenes Laertius)[2]的记载,阿波洛多罗斯(Apollodorus,活跃于公元前

---

1) 根据希腊历史学家希罗多德(Herodotus,约公元前484—约前420)的说法.

2) 3世纪希腊作家,著《希腊哲学家传》.

140 年)将泰勒斯的生年定在第35个"奥林匹亚"[1]的第一年(即公元前640年),卒年定在58个"奥林匹亚"(公元前548—前545年),终年78岁。年龄和生卒年不合,差错的产生可能是将39(希腊数字 $\gamma\theta$)误写成 35($\gamma\varepsilon$),这样生年应推迟16年,即公元前624年左右,此说较可信,和历史重大事件对照也相符。

泰勒斯早年是商人,曾游历巴比伦、埃及等地,很快学到那里的数学和天文知识,以后从事政治和工程活动,并研究数学和天文学,晚年转向哲学。他几乎涉猎了当时人类的全部思想和活动领域,获得崇高的声誉,被尊为"希腊七贤之首".实际上七贤之中,只有他够得上是一个渊博的学者,其余的都是政治家。例如,梭伦(Solon,约公元前630—约前560年)是雅典的执政官,著名的改革家;开伦(Chilon)是斯巴达的城邦监察官;柏利安得(Periander)是科林斯的统治者等等。

传 说 与 轶 事

泰勒斯没有留下完整的传记。历史上流传着许多关于他的轶事,从各个角度去描绘这个人物,在一定程度上反映了他的生平事迹。这些传说未必完全真实,但和他的性格是相称的。

(一)早年的商旅活动,使他接触各种事物,了解各地的人情风俗,开阔眼界。他用骡子运盐,某次,一头骡滑倒在溪中,盐被溶解了一部分,负担顿觉减轻,于是这头骡每过溪水就打一个滚。泰勒斯为了改变这牲畜的恶习,让它驮海绵,吸水之后,重量倍增,这头骡再也不敢故伎重演了。亚里士多德(Aristotle)提到另一则故事:泰勒斯利用各方面的知识,预见橄榄必然获得特大丰收,于是就垄断了这一地区的榨油机,事情果然不出所料。他用自定的价格出租榨油机,获得巨额财富。他这样做并不是想成为富翁,而

---

1)"奥林匹亚"(Olympiad)是古希腊计算年代的一种方式,从公元前776年第一次奥林匹克运动会算起,每4年举行一次,两次之间的4年叫做一个奥林匹亚。

是想回答有些人对他的讥讽：如果他真的聪明的话，为什么不发财呢？他现身说法，用事实证明发财不见得比研究天文学更加困难．他终于走上了探讨大自然奥秘的道路．

（二）柏拉图（Plato）记述另一件轶事，说泰勒斯仰观天象，不小心跌进沟渠中，一位秀丽的色雷斯（Thrace）[1]女仆嘲笑他说：近在足前都看不见，怎么会知道天上发生的事情呢？——“智者千虑，必有一失”．

（三）梭伦的故事．普卢塔克（Plutarch）[2]记载，梭伦到米利都去探望泰勒斯，问他为什么不结婚．泰勒斯当时没有回答．几天之后，一个陌生人来到梭伦面前，声称十天前曾去过雅典．梭伦问他有何见闻，那人说：有一个青年人的葬礼轰动了全城，因为其父是一位尊贵人物．儿子死时父亲不在家，他很久以前就出外游历去了．梭伦急切地问：“他叫什么名字？”那人说已记不清，只听说他很聪明、很正直．当惊慌失措的梭伦就要猜出死者是自己儿子的时候，泰勒斯笑着说：“这就是我不娶妻生子的原因．这种事连你那么坚强都承受不了．不过，这个消息完全是虚构的，不必介意．”（见［4］，p.65.）

（四）泰勒斯言谈幽默并常含有哲理．他对于“怎样才能过着正直的生活？”的回答是：“不要做你讨厌别人做的事情．”这和中国的“己所不欲，勿施于人”（《论语·颜渊》）如出一辙．有人问：“你见过最奇怪的事情是什么？”回答：“长寿的暴君．”又“你作出一项天文学的发现，想得到些什么？”他答道：“当你告诉别人时，不说是你的发现，而说是我的发现，这就是对我的最高奖赏．”

预　测　日　食

泰勒斯最脍炙人口的事迹是预报了一次日食，使战争停止．

1）希腊北部地区．

2）1 世纪希腊传记作家．

根据希罗多德（Herodoti，公元前5世纪中叶）的记载[1]，公元前612年，米底王国[2]与两河流域下游的迦勒底人（Chaldean）联合攻占了亚述（Assyria）[3]的首都尼尼微（Nineveh），亚述领土被米底和迦勒底瓜分。米底占有今伊朗的大部分，准备向西扩充，遇到吕底亚王国[4]的顽强抵抗，在哈吕斯河一带展开激战，连续5年未见胜负，生灵涂炭，横尸遍野。泰勒斯预先知道有日食，便扬言上天反对战争，某日必用日食来作警告。到了那一天，果然发生了日食，白昼顿成黑夜。正在酣战的双方士兵、将领大为恐惧，于是停战和好，后来两国还互通婚姻。

除了希罗多德之外，第欧根尼也记载了克森诺芬尼斯（Xenophanes，约公元前560—约前478年）[5]对这次日食预测的赞颂，他是当时的目击者。

这次战争的结束，当然还有政治、经济等方面的原因，日食只是起到促进的作用。不过由此知道泰勒斯预测了日食。历史学家还反过来根据日食的日期来印证重大的历史事件，因为即使是两千多年前，日食也是可以较准确地计算出来的[6]。多数学者认为这次日食发生在公元前585年5月28日下午3时[7]。

泰勒斯是怎样预知的？这是很重要的问题。后人作过种种猜测，一般认为是应用了迦勒底人发现的沙罗周期（Saros）。一个沙罗周期等于223个朔望月[8]，即6585.321124日或18年零11日（如其间有5个闰年则是18年零10日）。日月运行是有周期性的，日

---

1) 希罗多德的《历史（希腊波斯战争史）》（Historiae），中译本，1959，p.203.

2) 在今伊朗西北部，公元前8世纪建国，公元前550年为波斯所灭.

3) 底格里斯中游的军事强国，在今伊拉克北部.

4) 公元前7—6世纪小亚细亚国家，最早铸造金银货币.

5) 毕达哥拉斯学派的哲学家.

6) 奥地利天文学家奥泊尔子（Theodor von Oppolzer，1841—1886）著《日月食典》（Canon der Finsternisse，1887），推算从公元前1207年到公元2163年间的8000次日食和5200次月食．据此可知泰勒斯日食的时间.

7) 另一种可能是公元前609年9月30日．见 W. W. R. Ball, A Short account of the history of mathematics, Dover Publications, 1960, p. 17.

8) 从朔（阴历初一）到第二次朔的平均间隔，等于29.530588日.

月食也有周期．日食必发生在朔日，假如某个朔日有日食．18 年 11 日之后也是朔日，而日月又大致回到原来的位置上，因此很有可能发生类似的现象．例如 1973 年 6 月 30 日有日食，1991 年 7 月 11 日又有日食．不过一个周期之后，日月位置只是近似相同，所以见食地点和食象都有所改变甚至不发生日食．泰勒斯大概知道公元前 603 年 5 月 18 日有过日食，因而侥幸猜对．

有的学者认为他利用了另一种较短的周期：47 个朔望月或别的什么周期．（见 [6]，p.87.）也有人持否定态度，说对一个固定地区来说，根本不存在日食周期，所有周期都是对整个地球来说的．（见 [7]，p.142.）在当时的条件下，不大可能有全球性的统计资料．故泰勒斯预测是后人穿凿附会．现姑存此说．

测金字塔的高

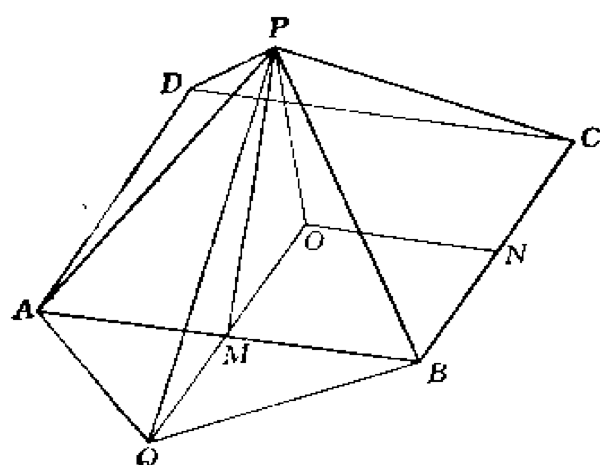
泰勒斯另一项备受赞扬的业绩是他在埃及时，测定了金字塔的高度．最早的记载出自海罗尼莫斯（Hieronymus，公元前 4—前 3 世纪）[1]，第欧根尼援引他的话，说泰勒斯利用人的身高和影子相等时，金字塔的高也和影子相等的道理，成功地测出金字塔的高．（[5]，p.129.）普利尼（Pliny，公元 23—79 年）[2]也有类似的记述：泰勒斯发现怎样可以得到金字塔或者其他物体的高，他在人身和影子等长的时候去量物体的影子．普卢塔克的记载更进一步，认为是利用了相似三角形的原理．他记述尼洛克森纳斯（Niloxenus）对泰勒斯所说的话：你的其他贡献，最使他（雅赫摩斯二世）[3]高兴的是金字塔的测量．不用许多工具，仅仅在金字塔影子的端点处树立一根杆子，借助太阳的光线，构成两个三角形，你指出塔高与杆高之比，等于两者影长之比．

1）亚里士多德的门徒，曾在亚历山大大帝手下任将军，有历史著作．

2）罗马学者，著《自然史》（Historia naturalis）37 卷，是当时的自然科学百科全书．

3）Ahmose II，古埃及 26 王朝法老，公元前 570—前 526 年在位．

前一种说法原理较简单，容易被人接受，因此可能性较大。但问题在于金字塔不是一根杆，它的底很大，底的中点不能到达，影长是难以直接量得的。历史上没有更详细的记载，现在只能作一些推测。如果太阳在适当的位置，影长还是可以量出来的。以最大的胡夫(Khufu)[1]金字塔为例，原高 146.5 米，底为每边长 230 米的正方形。四面正对着东南西北。如果太阳位于正东、正南、正西(正北是不可能的)，仰角又小于侧面与底的夹角$\angle OMP$(约等于 51°52′)，塔影就是一个等腰$\triangle AQB$，影长应该是 $OQ = OM + MQ$，而 OM 等于底边长之半，现在只要量出 MQ 就行了。如果应用相似三角形的关系，下一步的工作是作比例计算。若避免用比例，可以等待太阳的仰角为 45° 时(即杆长与影长相等时)再量 MQ，这时 OQ 就是塔高。



这种可能性是存在的。比方，每天正午(太阳在正南方)定时观测杆影，不难发现秋分以后影子逐渐增长，到了某一天，影长和杆长相等，这时太阳既在正南，仰角又是 45°。[2] 如选择正东或正西方向，情况与此类似。总之，只要耐心观察，测度塔高不用比例就能解决。

如允许应用比例原理，就可以不必受时间的限制。较合理的办法是作两次观测。第一次记下杆顶影子的位置 a，和塔顶影子

---

1) 一译库孚，古希腊人称之为奇阿普斯(Cheops)，古埃及第 4 王朝法老(约公元前 2589—前 2566 年)。

2) 金字塔的地理纬度是北纬 29°59′，暂作 30° 计算，秋分时的正午，太阳仰角 60°(纬度的余角)，以后太阳渐向南移，11 月 3 日前后的某一天，太阳的赤纬是 −15°，正午时仰角就是 45°，冬至时仰角最小，以后又渐渐增大，到 2 月 8 日左右又是 45°。这种办法有时有些误差，但一般不超过10′。

的位置 A，第二次观测时杆顶影子在 b 处，塔顶影子在 B 处．那么，$AB:ab$ 就等于塔高与杆长的比．（见 [9]，p.53.）不管用哪一种方法，都可以说是西方测量术的滥觞，泰勒斯对相似形已有初步的认识．

数学的贡献

泰勒斯在数学方面的划时代贡献是开始引入了命题证明的思想．命题的证明，就是借助一些公理或真实性业经确定的命题来论证某一命题真实性的思想过程．它标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论．这在数学史上是一次不寻常的飞跃．在数学中引入逻辑证明，它的重要意义可以从下面这几个方面看出来：一、保证命题的正确性，使理论立于不败之地；二、揭露各定理之间的内在联系，使数学构成一个严密的体系，为进一步发展打下基础；三、使数学命题具有充分的说服力，令人深信不疑．证明命题是希腊几何学的基本精神，而泰勒斯是希腊几何学的先驱．

欧德莫斯（Eudemus，约公元前 335 年）[1]是有资料可查的第一个科学史家，曾著《算术史》、《几何学史》、《天文学史》，可惜均已失传．普罗克洛斯(Proclus)是雅典柏拉图学园[2]晚期的导师[3]，公元 450 年左右，给欧儿里得《几何原本》卷 1 作评注，写了一个"几何学发展概要"，通常叫做《普罗克洛斯概要》(Proclus's summary)（以下简称《概要》，见[10]，pp.144—161)，或叫《欧德莫斯概要》(Eudemian summary)，因为它主要取材于欧德莫斯的《几何学史》．

《概要》写道："泰勒斯是到埃及去将这种学问(几何学)带回希腊的第一人．他自己发现了许多命题，又将好些别的重要原理透露给他的追随者．他的方法有些是具有普遍意义的，也有一些只是经验之谈．"

1）亚里士多德的门徒，曾阐发并宣扬亚里士多德的学说．

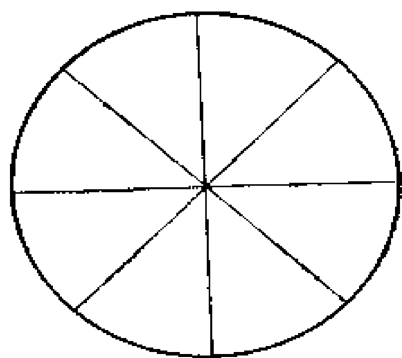
2）柏拉图在公元前 387 年创立的著名学习场所．

3）新柏拉图主义的领袖，曾诠释柏拉图的学说．

普罗克洛斯指出他发现的命题有：

(1) 圆的直径将圆平分。

普罗克洛斯说泰勒斯第一个证明了这个命题。多数学者认为他大概只是认识了这个性质而不是确实证明了它。（见 [5]，p. 131）。在《几何原本》中，欧几里得也只是作为定义提出来（卷 I 定义 17：直径是通过圆心的直线，……将圆平分）。M. 康托尔 (Cantor) 推测，可能是受到某些图形的启发。(见 [8]，p.140.)从埃及的纪念碑上常看到将圆分成若干扇形的图，这些扇形显然都是相同的。



(2) 等腰三角形两底角相等。

在《几何原本》中，这是卷 1 命题 5，也就是有名的"驴桥"。泰勒斯是用"相似"这个词来描述相等角的，说明他还未将角作为具有大小的量，而是看作有某种形状的图形。这和古代埃及人的观点一致。

(3) 两直线相交，对顶角相等。

这是《几何原本》卷 1 命题 15。

(4) 有两角夹一边分别相等的两个三角形全等。

这是《几何原本》卷 1 命题 26。欧德莫斯在《几何学史》中将这定理归功于泰勒斯，并说他利用这定理测出从船只到岸边的距离。具体怎样测法，数学史家作过几种猜测。T. 希思 (Heath) 设计一种简单易行的方法，其原理实际就是"一顶军帽定河宽"：人站在岸边，将军帽戴得低一些，使得眼睛望着彼岸某一点，同时看到帽檐，这时，视线、河宽和身高构成一直角三角形。现在转过身来，同样顺着帽檐看到此岸的一点，这一点和人的距离就是河宽。(见 [5] p.133.) 如要更精确一些，可制作一个工具，站在高处测量。

(5) 对半圆的圆周角是直角。

这是第欧根尼的记载，他引用潘菲拉（Pamphila）[1]的话，说泰勒斯从埃及人那里学到了几何学，第一次在圆内作内接直角三角形，并为此宰了一头牛来庆祝．但也有人说这是毕达哥拉斯发现勾股定理时的故事．

如果这记载可靠，那么泰勒斯的几何学已经达到相当高的水平，应该能够掌握更多的知识，如三角形内角和等于两直角等（见[3]，p.10）．上述的命题看起来并不复杂，有些仅凭直观就能判断，然而泰勒斯不满足于“知其然”，还要穷究“所以然”．历史学家强调他证明了（至少是企图证明）这些命题．在数学中引入证明的思想，这是难能可贵的．从此数学从具体的、实验的阶段过渡到抽象的、理论的阶段，逐渐形成一门独立的、演绎的科学．

其他的成就

泰勒斯是公认的希腊哲学鼻祖，他第一次冲破了超自然的鬼神思想的羁绊，去揭示大自然的本来面目．他看到一切生命都依赖于水，而水无处不在，于是断言水是万物的本质．而地球像一个圆盘，漂浮在浩瀚无垠的水中．这种观点使他无法解释日月食的现象．他可能写过《航海天文学》，建议希腊的航海者按小熊星座去寻找北极，他们过去的习惯是看大熊星座．欧德莫斯说他已知按春分、夏至、秋分、冬至来划分的四季是不等长的．在物理学方面，琥珀摩擦产生静电的发现也归功于他（见［11］，中译本 p.11）．

泰勒斯思想的影响是巨大的．在他的带动下，人们摆脱了神的束缚，去探索宇宙的奥秘，经过数百年的努力，出现了希腊科学的繁荣．泰勒斯首创之功，不可磨灭．

文　　献

[1] H. Diels and W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker. 6th ed., 3 vols,

1）罗马皇帝尼禄（Nero）统治时期（公元 54—68 年）的女作家，以写历史备忘录著称．

Berlin, 1951 -1952.

[2] D. R. Dicks, Thales, *Classical Quarterly*, 1959, pp. 294—309.

[3] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Dublin-London, 1889; Arno Press, New York; 重印, 1976.

[4] D. E. Smith, History of mathematics. Ginn and Company, I 1923

[5] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, I 1921.

[6] B. L. van der Waerden, Science awakening, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954,

[7] O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity, Brown University Press, 1957.

[8] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. B. G. Teubner, I 1922.

[9] T. Dantzig, The bequest of Greeks, George Allen & Unwin Ltd, 1955.

[10] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, I 1957.

[11] F. Cajori, A history of physics, Macmillan Company, 1928 (中译本: F. 卡约里,物理学史,内蒙古人民出版社, 1982).

毕达哥拉斯

梁 宗 巨

(辽宁师范大学)

毕达哥拉斯(Pythagoras) 约公元前560年生于萨摩斯岛(Samos. 小亚细亚西岸);约公元前480年卒于梅塔蓬图姆(Metapontum.,今意大利半岛南部塔兰托附近)。哲学、数学、天文学、音乐理论。

毕达哥拉斯与中国孔子(公元前551—前479年)同时。他早年曾在锡罗斯岛(Syros,在爱琴海中)向费雷西底(Pherecydes)学习,又曾师事伊奥尼亚学派的安纳西曼德(Anaximander). 以后游历埃及、巴比伦等地(一说到过更远的印度),接受古代流传下来的天文、数学知识. 回到家乡以后,开始讲学,未见成效。公元前520年左右,为了摆脱波利克拉底(Polycrates)的暴政,和母亲及唯一的一个门徒离开萨摩斯岛,移居西西里岛,最后定居在克罗托内(Crotone,意大利半岛南端). 在那里广收门徒,建立一个宗教、政治、学术合一的团体.他的讲学吸引了大量的听众,包括各个阶层的人特别是社会上层的人士. 当时妇女是被禁止出席公开会议的,毕达哥拉斯打破这个界限,允许她们听讲. 在热心的听众中有房主米洛(Milo)的女儿西雅娜(Theano),绮年玉貌,后来成为他的妻子,还给他写过传记,可惜已失传.

毕达哥拉斯将信徒们分为两等. 一等是普通的听讲者,这是大多数. 他们只能听讲,不能发问,更不能参加讨论,高深的知识是不向他们传授的. 另一等才是真正毕达哥拉斯学派的成员,叫

做 μαθηματικοί，这个字的原意是指那些获得较高深知识的人，源出于 μάθημα，指课程、教诲、学说等．以后演化为数学家（μαθηματικὸς）、数学（μαθηματικὰ）.这就是欧洲文字“数学”（拉丁文 mathematica、英文 mathematics、德文 Mathematík 等等）一词的来源．

这个学派的组织是很严密的，带有浓厚的宗教色采．每个成员都要接受长期的训练和考核，遵守很多清规戒律，宣誓永不泄露学派的秘密和学说，在学术上要达到一定的水平．加入组织还要通过一系列的神秘仪式，以求达到“心灵的净化”．他们相信依靠数学可使灵魂升华，与上帝融为一体．数学是教义的组成部分．他们不仅认为万物都包含数，而且万物都是数，宣称上帝用数来统御宇宙．这是毕达哥拉斯学派和其他教派的主要区别．

学派的成员有共同的哲学信仰和政治理想，训练是严格的，食物是简单的．学派的教义鼓励人们自制、节欲、纯洁、服从．他们起初在大希腊（Magna Graecia，今意大利南部一带）赢得很高的声誉，产生过相当大的政治影响，但却引起敌对派的忌恨．后来受到民主运动风暴的冲击，毕达哥拉斯被迫移居梅塔蓬图姆，终于被暴徒杀害．在克罗托内的活动场所连续遭到破坏，许多门徒逃回希腊本土，在弗利奥斯（Phlius，伯罗奔尼撒半岛东北部）重新建立据点，也有些人到塔兰托去，继续进行数学、哲学研究以及政治活动，直到公元前 4 世纪中叶．这个学派繁荣兴旺达一个世纪以上．

毕达哥拉斯本人没有留下什么著作，而学派内部的发明创造是秘而不宣的，外人鲜知其详．不过也有少数通过各种途径流传开来．以后组织渐渐分散，保密的教条被放弃，才出现一些公开讲述这个学派教义的著作．第一本这类的书是学派的晚期成员菲洛劳斯（Philolaus）在公元前 370 年左右写的，当时柏拉图等人曾看到过，现今只残留片断，其内容偏重哲学，数学的记载不多．此后许多学者开展毕达哥拉斯的研究，他的思想和学说逐渐为人们所知．

数的理论

毕达哥拉斯学派将抽象的数作为万物的本原。研究数的目的不是为了实际应用，而是想通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理。他们对数作过深入的研究，并得到很多结果，但常常将数和迷信奇特地结合起来。他们注意到数与音乐和谐之间的关系、数与几何图形的关系、数与天体运行的关系。把整个学习课程分为四大部分：1. 数的绝对理论——算术；2. 数的应用——音乐；3. 静止的量——几何；4. 运动的量——天文。合起来叫做“四道”(quadrivium，四条道路，或“四艺”)，这名称一直沿用到中世纪。后来又加上文法、修辞、逻辑，合称“七艺”。中国古代有“四术”(诗、书、礼、乐)、“六艺”(礼、乐、射、御、书、数)之说，堪与媲美。

毕达哥拉斯发现一根拉紧的弦弹出一个音调，比方说是 do，那么取其长度的 1/2，弹出的音调就是高一均(读 yùn) 的 dȯ，这时弦振动的频率加倍(频率与弦长成反比)。如取原长的 2/3，弹出的音调就是 so。这几个音一起弹奏是悦耳的，这种愉快感觉叫做谐和(或调和)。$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，1 这三个数的倒数 2，$\frac{3}{2}$，1 成等差数列，那么原来这三个数就叫做调和数列。这就是调和数列名称的起源。同样，取原长的 3/4，弹出的音是 fa。总的来说，如果两弦紧张的程度(张力)相同，长度为简单的整数比时，奏出来就是和谐悦耳的乐音。这原理对管乐(笛、箫之类)也是适用的，不过情况较为复杂，因为声波的波长并不严格地正比于管长，还和管的粗细有关[1]。

---

1) 中国古代用竹管来定音律，是根据“三分损益”的原则。取一根 9 寸长的竹子作标准，然后“三分损一”(去掉 1/3)，剩下 6 寸作为第二根管的长。再“三分益一”(乘以 4/3)，所得的 8 寸作为第三根管长。这样连做四次，得到五根长度不同的管子，吹出五个音：宫、商、角、徵 (zhǐ)、羽，相当于 do，re，mi，so，la，和毕达哥拉斯方法不同。

根据“简单整数比”的原理，这个学派创造了一套音乐理论．1，2，3，4 这头四个自然数，按 4:3，3:2，2:1 的比构成几个主要的音调，而这四个数的和是 10．于是他们认为 10 是一个完美的数，称之为“四数组”（tetractys），用 ∴∵ 来表示，作为神圣的象征，10 同时成为宣誓时的誓词．后来斯皮尤西波斯（Speusippus，柏拉图的外甥，公元前 347—前 339 年是柏拉图学园的领导人）指出 10 包含点、线、面、体各种类型的数：1 是点，2 是线，3 是三角形，4 是四面体．这更增加了 10 的神秘性．这是他们的信条“一切事物都按数来安排”的又一例证．

他们认为偶数是阴性的，奇数是阳性的．偶数可以分为相等的两部分，而奇数只能分成不相等的两部分．按照这个定义，1 既不是奇数也不是偶数．5 是第一个阴性数 2 与第一个阳性数 3 之和，所以是结婚的象征．

毕达哥拉斯特别厌恶 17 这个数，它正好在 16 与 18 之间．而 16 与 18 是仅有的两个数（自然数），它同时等于一个矩形（包括正方形）的面积与周长．边长是 4 的正方形面积与周长都是 16，边长是 3，6 的矩形面积与周长都是 18．容易证明不可能有别的自然数具有这种性质．事实上，设矩形的两边是 x，y，解不定方程

$$xy = 2x + 2y,\quad y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2},$$

x 只可能取 3，4，6，对应的 y 是 6，4，3．xy 只可能是 16 和 18．

晚期的希腊学者如尼科马霍斯（Nicomachus of Gerasa）等对这一类数的神秘主义仍然很迷恋，在他的《算术入门》（Introductio Arithmetica）一书中大力宣扬数的神秘性和神圣性．他虽然后于毕达哥拉斯好几个世纪，但他的思想和学说却比较全面地反映毕达哥拉斯学派的本来面目．更晚的伊安布利霍斯（Iamblichus，约 250—330）也是如此，将数说得玄妙莫测，他们被后人称为新毕达哥拉斯学派．

在欧几里得的《几何原本》（Elements）中，卷 VII，VIII，IX

讲的是数论，毕达哥拉斯的理论有许多在这里得到了反映．不过完全摈弃了神秘的色彩，所有的论断都给出了严格的证明。

完全数与亲和数

如果一个数等于除它本身以外的全部因子之和，这个数叫做完全数．例如

$$6 = 1 + 2 + 3,\ 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

6，28 就是完全数．完全数的发现，是毕达哥拉斯学派卓越贡献之一．尼科马霍斯给出四个完全数 6，28，496，8128，并指出一般规律：若 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = P$ 是素数，那么 2^nP 就是完全数。这在欧几里得《几何原本》中已有证明（卷 IX 命题 36）．道理很简单，因为 2^nP 能被下列各数整除：

$$1,\ 2, \cdots,\ 2^n,\ P,\ 2P, \cdots,\ 2^{n-1}P.$$

除此以外，不能被任何小于它本身的数整除，而这些除数（因子）之和为

$$1 + 2 + \cdots + 2^n + P + 2P + \cdots + 2^{n-1}P$$
$$= P + P(2^n - 1) = 2^nP.$$

证明中用到等比数列的求和公式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

这公式曾在毕达哥拉斯学派的著作中出现．据此推测毕达哥拉斯本人可能已经知道完全数的这一性质：如果 $2^n - 1$ 是素数，那么 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 就是完全数．尼科马霍斯提到的 4 个完全数是 $6 = 2(2^2 - 1)$，$28 = 2^2(2^3 - 1)$，$496 = 2^4(2^5 - 1)$，$8128 = 2^6(2^7 - 1)$。

$2^n - 1$ 类型的数，17 世纪时 M. 梅森（Mersenne，1588—1648）曾详加研究．由毕达哥拉斯开创的完全数研究，至今还有很多问题没有解决。

和完全数有关的还有亲和数．毕达哥拉斯发现，284 这个数除它本身外的所有因子之和等于 220，而 220 除它本身外的所有

因子之和又等于 284，即

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142,$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

这一对数叫做亲和数，象征着友谊．当别人问及“朋友是什么”时，毕达哥拉斯回答说：“是另一个我（Alter ego）”，可用亲和数来表示。

两千多年之后，P. de 费马（Fermat，1601—1665）才找到第二对亲和数 17296 和 18416．1750 年，L. 欧拉（Euler，1707—1783）写出 62 对亲和数（包括以前知道的）．现在已经知道上千对亲和数。

形　　数

毕达哥拉斯很注意形与数的结合，许多论断既是数的关系，也是形的关系．他把算术中的单位叫做“没有位置的点”，而几何中的点叫做“有位置的单位”。

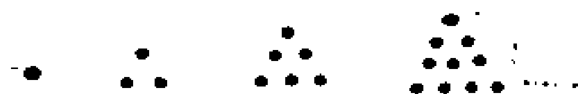


图　1

形数（figurate number）是形与数的结合物．用点子排成图 1 所示图形．每一个图的点数叫做三角数，第 1 个三角数是 1，第 2 个三角数是 $1 + 2 = 3$，第 3 个三角数是 $1 + 2 + 3 = 6$，…，第 n 个三角数是

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

毕达哥拉斯大概已经知道这个公式，后来出现在尼科马霍斯的书中．同样（图 2）的点数 1，4，9，16，…，n^2，…叫做平方数．平方数可以看作从 1 起连续奇数之和，如图 3 所示：

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2.$$

一般地说，作出平方数 n^2 的图形之后，再镶上一个曲尺形 ⌐┘ 的

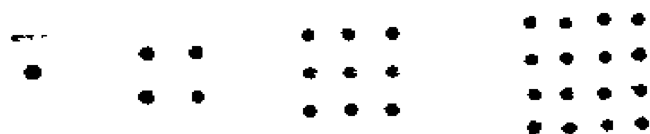


图 2

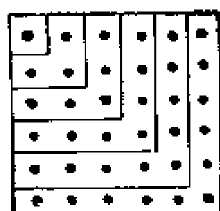


图 3

边，点数是 $2n+1$，就得到下一个平方数．即

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

曲尺形叫做磬折形(gnomon)，这字的原意是指一根直立的杆，观测日影的位置以定时刻，也就是日晷．后来和水平尺连起来，构成一个画直角的工具，同时也可以测日影．在中国叫做"矩"，它的用处很大，现今仍然是木工不可或缺的器具．在欧几里得《几何原本》中，磬折形的意义有所推广，它指在平行四边形的一个角上截去一个相似的平行四边形后所剩下的图形，如图 4 的阴影部分．后来再进一步推广．

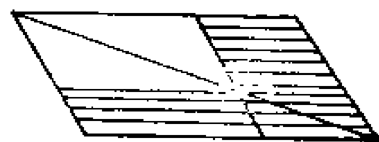


图 4

类似地，可用点子排出五角数(图 5)，六角数(图 6)等等．

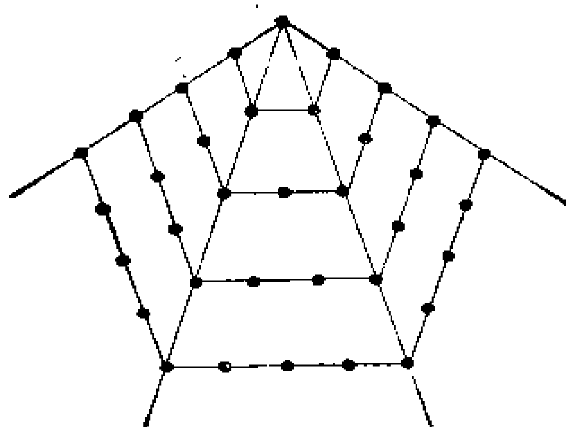


图 5

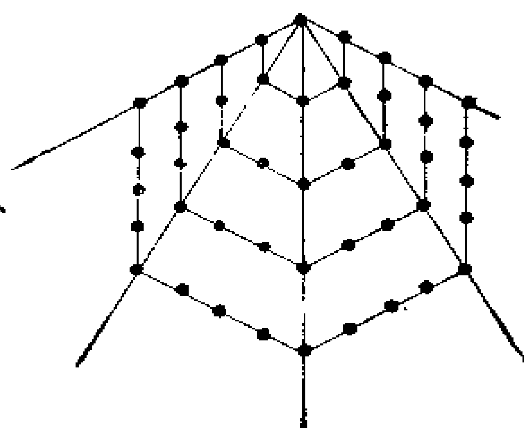


图 6

五角数是 1，5，12，22，35，…

六角数是 1，6，15，28，45，…

知道五角数(或六角数)的某一项，用镶边的办法可以得下一项．这一点从图形看得很清楚．所镶的边，仍然叫做 gnomon，当然意义是推广了的．

这一类数列现在可归入高阶等差数列的范围．毕达哥拉斯本人及其学派开展了研究，但究竟深入到什么程度，很难确知．

勾 股 定 理

传统的说法，一致认为勾股定理是毕达哥拉斯发现的，因此西方叫做毕达哥拉斯定理，这几乎是家喻户晓的．还传说他为了庆祝这伟大的胜利，宰了一头牛来祭神．这传说不大可信，因为他们的教义是极力反对以动物特别是牛作牺牲的，有的作者还肯定他们是素食主义者．

经过仔细的研究，现在有充分的证据表明巴比伦人在汉穆拉比（Hammurabi，约公元前 1700 年)时代已经知道这一定理．特别是 O. 诺伊格鲍尔（Neugebauer）等人 1945 年诠释了巴比伦泥板"普林顿 322"[1]，更肯定了这一结论．那上面列有 15 组"毕达哥拉斯数"(即满足 $x^2+y^2=z^2$ 的整数)，最大的一组斜边是 18541，一个直角边是 12709．令人惊讶的是时间竟早了一千多年！毕达哥拉斯本人曾到过巴比伦，很可能从那里学来．不过从他们欣喜若狂的情况来看，也不排除重新发现的可能性，或者是找到了证明的方法．

对于勾股定理，现在至少有三种不同的理解，当然表达方式也不同：

1. 在直角三角形斜边上的正方形等于直角边上的两个正方形．

这就是欧几里得《几何原本》卷 1 命题47．注意这里讲的纯粹

---

1) G. A. 普林顿（Plimpton）收藏的 322 号泥板，长方形 12.7×8.8 厘米，现存美国哥伦比亚大学．

是几何图形之间的关系，完全不牵涉到数的问题．所谓相等，是指拼补相等，即将两个正方形剖分为若干块，可以拼凑成斜边上的大正方形。

2. 直角三角形直角边上的两个正方形面积之和，等于斜边上正方形的面积。

图形的面积是一个数，定理指出两个数的和等于第三个数．应注意欧几里得从来没有把面积看作一个数来加以运算。

3. 直角三角形斜边长度的平方，等于两个直角边长度平方之和。

长度是数，数的平方还是数，定理讲的是数与数之间的关系．并不考虑数的平方的几何意义．

这三种提法的意义是不同的，第一种不妨称为“形的勾股定理”，后两种称为“数的勾股定理”．毕达哥拉斯当时怎样理解这个定理？根据他对于数的认识，似乎应该是第一种．这个学派虽然发现了不可通约量，但拒绝承认无理数是数．就拿最简单的等腰直角三角形来说，设直角边是 1，如果数的勾股定理成立，斜边长度的平方应该是 2，于是出现什么数的平方是 2 的问题．也就是要回答“斜边的长度是多少？”当他们进一步了解到任何数（他们所知道的有理数）都不是斜边的长时，必定会大惑不解．因此很难说他们已经建立了数的勾股定理．至于他们怎样发现这个定理，又怎样去证明它，后人倒作了一些合乎情理的推测．

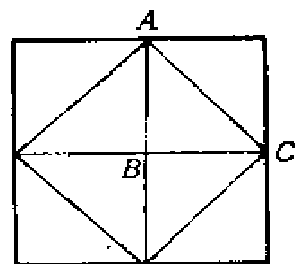


图 7

这个学派曾研究过铺地砖的问题．像图 7 那样用等腰直角三角形来铺地是常见的．不难看出，$\triangle ABC$ 的直角边上的两个正方形合起来正好是斜边上的正方形．受此启发，自然会推想对于非等腰的直角三角形这关系也能成立．

任给 $\triangle ABC$（图 8），各边为 a，b，c．以 $a+b$ 为边完成 $\square CD$，它由 4 个全等的$\triangle$和 C 边上的$\square$III 拼成．如果将$\triangle$移动

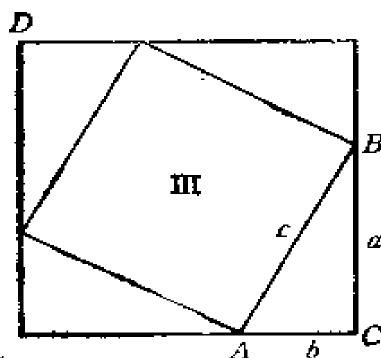


图 8

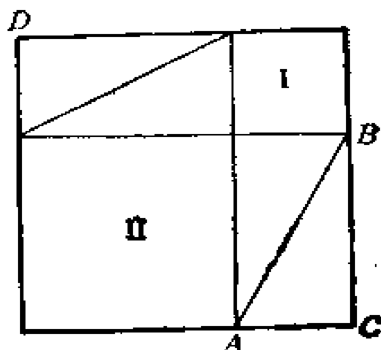


图 9

一下位置，立刻看出□CD 也可以由 4 个△和 a，b 上的两个□I，□II 拼成图 9．从而得到

$$□\text{III} = □\text{I} + □\text{II}.$$

毕达哥拉斯的证法也许和这个类似．

勾股定理大概是所有数学定理中证法最多的，有人已收集到 367 种之多．

毕达哥拉斯还发现用三个整数表示直角三角形边长的一种公式，也就是不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

的一组解：$2n+1$，$2n^2+2n$ 分别是二直角边，$2n^2+2n+1$ 是斜边．满足(1)的正整数，现在叫做毕达哥拉斯数或勾股数组．上面这一组解并不是(1)的全部解，只限于斜边与一个直角边的差是 1 的那一种解．它很容易从前面提到的连续奇数和是平方数这一关系推出．讨论形数时已知

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$$

如果左端最后一个奇数恰好是某一个奇数 $2n+1$ 的平方（如 $25 = 5^2$，$49 = 7^2$ 等）：

$$2k + 1 = (2n+1)^2 \tag{2}$$

那么左端就是两个平方数 k^2，$(2n+1)^2$ 之和，又由(2)知 $k = 2n^2 + 2n$，于是有

$$(2n^2+2n)^2 + (2n+1)^2 = (2n^2+2n+1)^2.$$

毕达哥拉斯通过这一关系得出他的结果，是顺理成章的．

晚期的希腊代数学家丢番图（Diophantus）虽然已经知道(1)的一般解法，但未明显地表述出来。直到7世纪初，(1)的完整解答 $2mn$，m^2-n^2，$m^2+n^2(m>n)$ 才由印度的婆罗摩笈多(Brahmagupta)明确地给出。

正多面体

这个学派在几何方面还发现了5种正多面体.关于这一点，有几种不同的说法。一种说毕达哥拉斯本人原先只知道4种：四面体、六面体、八面体、二十面体。另一方面，他主张一切物质都由土、水、气、火四大元素构成。土是固体、水是液体、气是气体、火是比气体更稀薄的东西.他把这四大元素和四种正多面体联系起来，说土生于正六面体，水生于正二十面体，气生于正八面体，火生于正四面体。后来发现还有正十二面体，但没有第五种元素，只好同整个宇宙对应。

另一种意见认为毕达哥拉斯早就知道正十二面体，还有正四面体和正六面体.理由是正十二面体的每一个面都是正五边形，而这个学派对正五边形的作图法深有所知，并且用五角星来作他们秘密组织的徽章或联络的标志，称之为“健康”。有一则故事说这个组织的一个成员流落异乡，贫病交迫，无力酬谢房主的款待，临终前要求房主在门前画一个五角星。若干年后，有同派的人看到这个标志，询问事情的经过，厚报房主而去。

1885年，在意大利帕多瓦(Padua)附近的欧加内丘陵(Colli Euganei)发现用皂石制造的正十二面体，是公元前500年以前的遗物，源出于意大利西北部的伊特拉斯坎(Etruscan)。此外，在别处也发现类似的正十二面体，不下二十六个。可以推想当时毕达哥拉斯学派的人见过这种东西，以后便作为数学研究的对象。

不管是正五边形或是正十二面体，都和希帕索斯(Hippasus，约公元前470年，是梅塔蓬图姆地方的人)这个人物有关。他原先是学派的成员，后来被开除或被投入大海中淹死，也有的说是船只

出事沉没，因而丧生．关于原因，至少有三种传说：1. 是政治问题，他违反教规，参与反贵族的民主运动；2. 自夸发现了正十二面体或不可通约量；3. 泄漏了这些秘密。

不可通约量

不可通约量或无理量的发现，也许是这个学派最重大的贡献，但却和他们的信条相抵触。他们认为万物都可以用数来表示，所谓数，就是自然数与分数。除此以外，他们不认识也不承认有别的数。无理量的发现表明有些量不能用数来表示。这对他们的信条是一个致命的打击。他们惶恐不安，妄图用保密的办法来掩盖这一事实，但实际只能是掩耳盗铃。

他们通过什么途径取得这一项成就？众说纷纭．归结起来，有下列这几种可能：

1. 用辗转相截的方法求正方形的边与对角线的公度，发现公度根本不存在。

如图 10 所示，BC 是正方形的一边，AC 是对角线，现求两者的公度。先在 AC 上截取 $DC = BC$，作 $DE \perp AC$ 交 AB 于 E，易知 $AD = DE = EB$。AC 截去 DC 后剩下的一段 $AD < AE < AB = BC$。下一步应该在 BC 上截取等于 AD 的线段，但 $AB = BC$，故也可以在 AB 上截取。截取 $EB = AD$ 之后，剩下的 AE，正好是以 AD 为边的正方形的对角线。于是情况又和开始时一样，以下的步骤只是重复上述的手续，这种重复永远不会完结．因此不可能存在公度．即 AC 与 AB 不可通约。

2. 用同样的方法求正五边形的一边与对角线的公度，或者将一个线段分为中末比之后，求大、小两部分线段的公度，最后证明公度不存在。

正五边形的五条对角线构成一个五角星形，它的中心形成一个小正五边形(图 11)．容易证明 $AB = AD = EC$，$AE = DC = FG$。现在求一边 AB 与对角线 AC 的公度。先在 AC 上截取

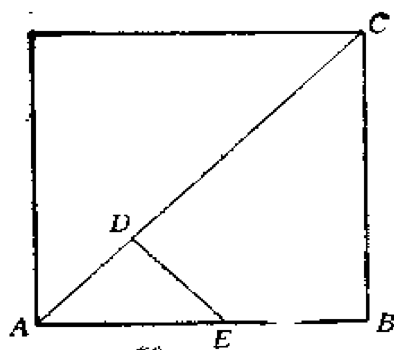


图 10

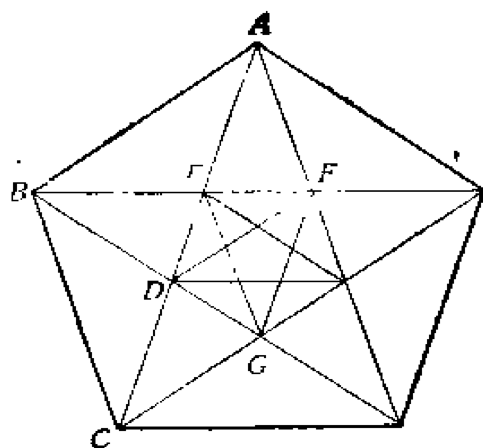


图 11

$AD = AB$，剩下一小段 $DC < EC = AB$，下一步应该用 DC 或 AE 去截 AD，AD 截去 AE 后剩下的 ED 是小正五边形的一边，而 $FG = AE$ 是对角线。接着应该是用 ED 去截 AE 或 FG。于是又重复上述求正五边形的一边与对角线的公度的手续。而且永远这样重复下去，所以不存在公度。

中末比的情形与此类似，不再复述。

3. 建立了算术(等差)中项、几何(等比)中项、调和中项的概念之后，很自然会提出"两个最小的数 1，2 的等比中项是什么"的问题。后来证明不存在这样的数。

4. 用几何方法证明了勾股定理之后，他们相信"数的勾股定理"也一定成立。于是便有"单位正方形的对角线等于多少"的问题。结果出现了不可克服的矛盾。

3 和 4 这两个问题都是要找出一个数来，使得它的平方等于 2。设这个数是既约分数 $\frac{n}{m}$，则有 $n^2 = 2m^2$，故 n^2 为偶数，但只有偶数的平方才能是偶数，故 n 是偶数。令 $n = 2k$，则 $n^2 = 4k^2 = 2m^2$，或 $2k^2 = m^2$，于是 m^2 是偶数，m 也是偶数。这与 $\frac{n}{m}$ 是既约分数的假设矛盾。故不存在一个数(分数)，它的平方等于 2。

这个"奇偶证法"有时叫做"欧几里得证法"，实际最早见于亚里士多德（Aristotle）的著作中，后来成为欧几里得《几何原本》卷X命题 117，这是后人添加上去的。许多标准的版本都将它删去，只放在附录中。

毕达哥拉斯学派有一个教规，就是一切发明都归功于学派的领袖，而且对外保密。所以讨论他们的学术成就时，很难将毕达哥拉斯本人和他的学派分开。不过不可通约量的发现，大约是在公元前 470 年左右，那时毕达哥拉斯已不在世。他们讨论比率与比例，仅限于可公度的量。设一个量是公度的 p 倍，另一个量是公度的 q 倍，那么两者的比就是 $p:q$，用 ῥητός 这个词来表示，原意是"可表达的"，"可比的"。后来转成拉丁文 ratio，rationalis。ratio 除了保留"比"的意义外，还有"理由"的意思。rationalis 由 ratio 派生出来，它的意义应该是"可比的"，但同时又有"有理（合乎情理）的"的含义。前者渐渐被人遗忘，只剩下"有理的"、"合理的"的含义。转成英文 rational，法文 rationnel 等也都已经没有"可比的"的意思。对于不可公度(不可通约)的量，这个学派认为是"不可比的"（ἄλογος）或"不可表达的"（ἄρρητος）。ἄλογος 同时也有"不合理的"的意思，相当于拉丁文 inrationalis，英文 irrational。

6 世纪时罗马人 A. 卡西奥多拉斯（Cassiodorius）首先在现代的意义下使用"有理的"（rationalis）、"无理的"（inrationalis）这两个词，确实认为有一些数是合理的，有一些数是不合理的。他未必想到原来的意义是"可比的"与"不可比的"。

对几何量建立一般的比例论，它适用于可公度量与不可通约量，这是欧多克索斯（Eudoxus）的功劳。他的理论后来成为《几何原本》第 5 卷的主要内容。

天　文　学

这个学派在天文方面也有不少独特的见解，有一些是正确的，

也有一些是假说或臆断。例如他们认为日、月、五星以及其他天体都呈球形，浮悬在太空中。天体的运行都沿着圆形的轨道，因为圆是最完美的平面图形，而球是最完美的立体。毕达哥拉斯原先认为地球是宇宙的中心，但他的门徒如希塞塔斯（Hicetas，叙拉古地方的人）、菲洛劳斯等人放弃了这一主张，说地球绕着“中心火”（central fire，不是太阳）旋转。在中心火的另一面，还存在一个和地球对称的“对地星”（counter-earth，或译“反地球”）。而人类永远不能看见对地星与中心火，因为居住人的那一半球总是朝着相反的方向。有人以为他们已经建立了太阳中心说，这是误解。

他们还认为天体与地球的距离以及运行的周期等等天文数据与和谐的音乐是合拍的，换句话说，天体运动就是在演奏音乐。有的信徒还牵强附会地说这种音乐只有毕达哥拉斯能够听到，一般人是听不到的。17 世纪时天文学家 J. 开普勒（Kepler）将这一思想大加发挥，说太空的运动是一部乐曲，它为智力思维所理解，而不为听觉所感知。有趣的是，1979 年竟有人用现代电子技术将开普勒的天文数据译成音乐，弹奏出来，幻想居然变成了现实。

结　　语

毕达哥拉斯和他建立的学派是不可分割的，它是继伊奥尼亚学派之后，古希腊第二个重要的学派。它存在的时间达两个世纪之久，影响之大，远远超过前一个学派。

近代数学特点之一是它的高度抽象性。人类最初认识数是从具体的事物开始的，3 头牛、5 棵树是容易理解的，但从这些实际的事物中抽象出纯粹的数 3 与 5，却经历了漫长的岁月。这是人类认识上的一次巨大的飞跃，这一飞跃首先应归功于毕达哥拉斯学派。他们承认并强调数学的对象是抽象的思维，和实际的事物有所区别。他们将抽象的数与形结合起来，进行了一系列的探讨，使数学逐渐成为一门独立的学科。同时又给它披上一层神秘的外衣，使人莫测高深。

在数学中引入逻辑因素，对命题加以证明，一般认为是从伊奥尼亚学派开始的，但毕达哥拉斯学派在这一方面作了重大的推进．他们的工作可以说是欧几里得公理化体系的前驱．

这个学派延续的时间很长，因此早期和晚期的思想和学说并不完全相同．他们所取得的成果，在当时的确是最先进的，然而由于保密，没有立刻在广大群众中产生应有的影响．等到局外人得知这些成果时，他们已经被别的学派超过了．不过他们的历史功绩，是不可磨灭的．

文　　献

[1] B. L. van der Waerden. Erwachende Wissenschaft, Birkhäuser Verlag, 1966.

[2] T. L. Heath, A history of Greek mathematics. Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[3] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics. Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[4] G. J. Allman. Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin University Press, 1889; Arno Press, New York 重印，1976.

[5] W.W. R. Ball, A short account of the history of mathematics. Dover, 1908.

[6] Á. Szabó, The beginnings of Greek mathematics. D. Reidel Publishing Company, 1978.

安纳萨戈拉斯

王　青　建

(辽宁师范大学)

安纳萨戈拉斯 (Anaxagoras) 约公元前 500 年生于吕底亚 (Lydia) 克拉左美尼 (Clazomenae, 小亚细亚古代城市);约前 428 年卒于密细亚 (Mysia) 兰普萨库斯 (Lampsacus)。自然哲学.

安纳萨戈拉斯的出生地在古代著名城镇士麦那 (Smyrna, 今土耳其伊兹密尔)附近. 那一地区是伊奥尼亚学派(亦称米利都学派)的活动领域. 该学派由古希腊学者泰勒斯 (Thales, 约公元前625—约前 547 年)创始,盛行于公元前 6 世纪,是希腊最早的哲学学派,以对自然现象进行观察和研究而著称,在数学、地理学和天文学等方面都有许多发现.公元前 6 世纪末到公元前 5 世纪初,小亚细亚一带被波斯人征服,伊奥尼亚学派逐渐衰退,但后期成员却将学派的思想传播到希腊各地,其中在雅典一带活动的代表人物就是安纳萨戈拉斯.

安纳萨戈拉斯出身名门望族,双亲非常富有. 但他却没有继承遗产过贵族生活,而是立志从事于科学研究。有的文献说,他曾师事伊奥尼亚学派的成员安纳西门尼斯 (Anaximenes of Miletus, 公元前585—前525年). 由于二人生活年代不同,他很可能只是读过安纳西门尼斯留下的著作,接受了伊奥尼亚学派的思想. 大约 20 岁时,安纳萨戈拉斯来到雅典,从事教学和科学研究,在那里一直住了 30 年. 当时的雅典正值希腊文化大发展时期. 安纳萨戈拉斯将伊奥尼亚学派的自然观及思辩方法带到那里,影响到希腊

科学和哲学的发展.古希腊著名剧作家欧里庇得斯(Euripides，公元前 484—前 406年)和雅典著名政治家伯里克利(Pericles，约公元前495—前 429年)都曾听过他的课，并与他成为好友.后来伯里克利成为雅典的政治首领(约公元前460年).他的政敌为了推翻他采取了陷害他朋友的手段，他们指控安纳萨戈拉斯在研究自然时犯有不敬神的罪名，说他曾断言太阳是一块无生命的、又红又热的石头，因此将他监禁并审判.安纳萨戈拉斯的结局有两种说法：一种说他被判罚款后流放；另一说是他被判了死刑，但伯里克利设法营救，保护他安全离开雅典。安纳萨戈拉斯对此感叹说："不是我失去雅典人，而是雅典人失去了我"。他的晚年是在兰普萨库斯度过的。

安纳萨戈拉斯被誉为优秀数学家，是希腊数学史上所谓"英雄时代"或"黄金时代"的开创者。可惜他却没有任何数学论著留传下来。传记作家普卢塔克(Plutarch，约公元 46—119年以后)在著作中记载说：安纳萨戈拉斯在狱中时"写"下了化圆为方问题的画法，可惜成果失传了。但他狱中研究科学的精神一直被传为美谈.数学家 F. 鲁迪奥 (Rudio, 1856—1929) 在研究古希腊有关化圆为方问题时 (1907) 对普卢塔克的叙述作了分析，推测安纳萨戈拉斯可能只知道古埃及人化圆为方的近似方法 (取正方形的边长等于圆直径的 8/9)，并据此在沙板上"画"了一个近似等于已知圆面积的正方形。T. L. 希思 (Heath, 1861—1940) 不同意这种说法:他通过对科学史家欧德莫斯 (Eudemus of Rhodes，公元前 4 世纪) 有关论述的原文分析指出：鲁迪奥理解的"画"应该是一种过程或运算方式，不单是描绘出图形来，还应证明了它的正确性.从化圆为方问题不久就成为希腊数学的热点来看，这一分析有一定道理。因此，安纳萨戈拉斯被认为是在理论上进行化圆为方问题研究的第一个人.古罗马建筑师和工程师维特鲁维厄斯 (Vitruvius, 公元前 1 世纪)在著作中说，安纳萨戈拉斯阐述过舞台布景的绘制问题，即设法将立体实物用平面布景表现出来。这涉及到立体几何中透视画法的基本原理，由此可见安纳萨戈拉斯对图形

作法是有一定研究的。G. J. 奥尔曼（Allman, 1824—1904）断言，他在几何学上有许多贡献。

安纳萨戈拉斯在天文学上的贡献也为后人称道。他第一个清晰地认识到月球自身不发光而是接受太阳光这一事实，并据此解释了月食和日食。他认为在月球下面有一些不透明的且看不见的物体，它们插在地球与月球之间时就产生了月食。哲学家、天文学家普罗克洛斯（Proclus, 公元410—485年）记述了这样一件事：当年苏格拉底（Socrates, 约公元前 470—前399年）曾看到两个青年在争论有关安纳萨戈拉斯或伊诺皮迪斯（Oenopides of Chios,公元前 5 世纪，古希腊天文学家和数学家）的科学发现，边说边在地上画了些成一定交角的圆，可能是表示天球赤道和黄道.欧德莫斯在《天文学史》（History of Astronomy）中将黄道圈环带的发现归功于伊诺皮迪斯，这也意味着他发现了黄道倾角。但安纳萨戈拉斯对此是否做出贡献已无法确定，他很可能对天文学中的某些数学运算有过论述.不过安纳萨戈拉斯对天文学的看法总是正误交织，因此没有产生很大影响。例如，他认识到太阳是由红热的岩石构成，而对其大小却说“甚至超过伯罗奔尼撒半岛”；他还认为天体是由太空的旋转运动而形成，但又说他们不依赖于数学规律运动。

安纳萨戈拉斯约公元前 467 年以后完成了他唯一的一篇学术论著《论自然》（On nature），留传下来的只有残篇，其中主要阐发他的哲学学说。在对世界本原问题的看法上他与以前几位哲学家不同，甚至有别于泰勒斯提出的水是自然物质本原的学说。他不满足于用某一种具体物质或元素作为万物本原的主张，提出新的“种子”说，认为种子有各种不同的性质，数目无限多，体积无限小，是构成世界万物的最初元素。种子具有各种形式、颜色和气味，它们的结合构成了世界上千差万别的事物。所谓事物的产生和消亡实际上是种子的结合和分离.各种不同的种子是混合在一起的，由种子构成的世界中的一切事物也不是彼此孤立的，没有一件东西能绝对与其他东西分开。例如热与冷不能分开，热能变成冷；他发问：“毛发与肉何以能来自非发与非肉之物?”继而又解释说，人吃

下食物，能长出头发、血液、肌肉等东西，因为食物中原来就是由这些不同性质的种子组成的。事物性质的区别完全取决于该事物占优势的种子的性质。为了回避同时代埃利亚学派的芝诺（Zeno of Elea, 约公元前 490—约前 425年）提出的悖论，他认为物质是无限可分的，然而任何被划分成的物质都是同一物质的更小部分，每一小部分都包含有构成原物质的组成成份，而且它本身也可以再划分，其性质保持不变。这是无穷大量和无穷小量的较早表述。由于种子是无限的，它们的结合与分离也是无限的，因而事物性质和种子的变化也无穷无尽。"种子论"的提出说明人们对世界万物的认识已不满足停留在感觉器官所能接触到的事物表面，而是力图深入事物的内部结构去发现世界的本原。它为原子论的产生作了准备，对人类深入认识世界起了重要作用。

为了解释宇宙起源问题，安纳萨戈拉斯又提出了"奴斯"说。"奴斯"是希腊文 νοῦς 的音译，英文为 nous，最初指感知、认识、理解事物的东西，后来一般译为理性或心灵。安纳萨戈拉斯认为构成宇宙万物的种子本身是静止的，推动种子的结合与分离的力量是种子之外的一种东西，就是"奴斯"。奴斯是无限的，不与其他事物相混，但又存在于一切事物和物质之中。他认为宇宙原是静止的无数种子的混合体，由于奴斯的作用，发生了旋涡运动，并从一点开始，逐步扩大到整个宇宙。这种运动的结果首先将浓的、湿的、冷的和暗的物质沉积在中部，而使稀的、干的、热的和明的物质占据边缘空间。然后在中部又分出云、水、土、石等物质，当它们聚集在中心合为一体时，地球就形成了。在这以后，由于旋转运动的剧烈，许多石块从地球上撕裂出去围绕地球运行，通过摩擦燃烧发光，形成天上的日月星辰。他还据此解释了公元前 467 年爱琴海北岸坠落陨石的原因，说那是因为石块的运动速度减缓所致。这种奴斯说陷入"外因论"或"第一推动力"说，"奴斯"一词后来成为唯心主义的术语，被说成是精神的实体。但是他提出的旋转分离说不仅包含离心力等基本概念，还与 18 世纪 I. 康德（Kant, 1724—1804）和 P. S. 拉普拉斯（Laplace, 1749—1827）提出的

星云学说有些相似之处。他的种子说和奴斯说成为哲学上二元论的先导，影响深远。

文　献

原始文献

[1] H. Diels and W. Kranz. Die Fragmente der Vorsokratiker, 6th ed., Berlin, 1951—1952, II, pp. 5--44.

[2] Schorn, Anaxagorae Fragmenta, Bonn, 1829.

研究文献

[3] J. Longrigg, Anaxagoras, Dictionary of Scientific Biography, Vol. I, Charles Scribner's Son-Publishers, 1970, pp. 149—150.

[4] D. Bargrave—Weaver, The cosmogony of Anaxagoras, *Phronesis*, 4(1959), 2, pp.77—91.

[5] F. M. Cleve, The philosophy of Anaxagoras, New York, 1949.

[6] C. Strang, The physical theory of Anaxagoras, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 45 (1963), 2, pp. 101—118.

[7] M. L. West, Anaxagoras and the meteorite of 467 B C., *Journal of the British astronomical association*, 70(1960), pp. 368--369.

[8] D. E. Gershenson and D. A. Greenberg, Anaxagoras and the birth of physics, Blaisdell, 1964.

[9] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[10] B. L. van der Waerden, Science awakening, P. Noordhoof Ltd, Holland, 1954.

芝　　诺

周　焕　山

（江苏教育学院）

芝诺（埃利亚的）(Zeno of Elea)　约公元前 490 年生于意大利半岛南部的埃利亚；约公元前 425 年卒。数学、哲学。

芝诺生活在古代希腊的埃利亚城邦。他是埃利亚学派的著名哲学家巴门尼德（Parmenides）的学生和朋友。关于他的生平，缺少可靠的文字记载。柏拉图在他的对话《巴门尼德》篇中，记叙了芝诺和巴门尼德于公元前 5 世纪中叶去雅典的一次访问。其中说："巴门尼德年事已高，约 65 岁；头发很白，但仪表堂堂。那时芝诺约 40 岁，身材魁梧而美观，人家说他已变成巴门尼德所钟爱的了。"按照以后的希腊著作家们的意见，这次访问乃是柏拉图的虚构。然而柏拉图在书中记述的芝诺的观点，却被普遍认为是相当准确的。据信芝诺为巴门尼德的"存在论"辩护。但是不象他的老师那样企图从正面去证明存在是"一"不是"多"，是"静"不是"动"，他常常用归谬法从反面去证明："如果事物是多数的，将要比是'一'的假设得出更可笑的结果。"他用同样的方法，巧妙地构想出一些关于运动的论点。他的这些议论，就是所谓"芝诺悖论"。芝诺有一本著作《论自然》。在柏拉图的《巴门尼德》篇中，当芝诺谈到自己的著作时说："由于青年时的好胜著成此篇，著成后，人即将它窃去，以致我不能决断，是否应当让它问世。"公元 5 世纪的评论家普罗克洛斯（Proclus）在给这段话写的评注中说，芝诺从"多"和运动的假设出发，一共推出了 40 个各不相同的悖论。芝诺的

著作久已失传，亚里士多德的《物理学》和辛普里西奥斯（Simplicius）为《物理学》作的注释是了解芝诺悖论的主要依据，此外还有少量零星残篇可提供佐证。现存的芝诺悖论至少有8个，其中关于运动的4个悖论尤为著名。

一则广为流传但情节说法不一的故事说，芝诺因蓄谋反对埃利亚（另一说为叙拉古）的僭主，而被拘捕、拷打，直至处死。

芝诺因其悖论而著名，并因此在数学和哲学两方面而享有不朽的声誉。数学史家F. 卡约里（Cajori）说，"芝诺悖论的历史，大体上也就是连续性、无限大和无限小这些概念的历史."但遗憾的是，芝诺的著作没有能流传下来，我们是通过批评他的亚里士多德及其注释者辛普里西奥斯才得以了解芝诺悖论的要旨的. 直到19世纪中叶，人们对于亚里士多德关于芝诺悖论的引述及批评几乎是深信不疑的，普遍认为芝诺悖论只不过是一些有趣的谬见. 英国数学家B. 罗素（Russell）感慨地说："在这个变化无常的世界上，没有什么比死后的声誉更变化无常了. 死后得不到应有的评价的最显眼的牺牲品莫过于埃利亚的芝诺了. 他虽然发明了4个无限微妙、无限深邃的悖论，后世的大批哲学家们却宣称他只不过是一个聪明的骗子，而他的悖论只不过是一些诡辩. 遭到两千多年的连续驳斥之后，这些"诡辩"才得以正名，…."19世纪下半叶以来，学者们开始重新研究芝诺. 他们推测芝诺的理论在古代就没有得到完整的、正确的报道，而是被诡辩家们用作倡导怀疑主义和否定知识的工具，从而背离了芝诺的真正宗旨. 而亚里士多德正是按照被诡辩家们歪曲过的形象来引述芝诺悖论的. 然而，迄今为止，学者们还找不出可靠的证据足以推翻亚里士多德和辛普里西奥斯关于芝诺悖论的记述. 由于目前对希腊哲学史了解得还不够，对于芝诺提出这些悖论的目的何在尚不清楚. 比较一致的意见是：芝诺关于运动的悖论并不是简单地否认运动，芝诺责难"多"也不是简单地把两只羊说成一只羊. 在这些悖论后面有着更深层的内涵. 亚里士多德的著作保存了芝诺悖论的大意，功不可

没，但是他对于芝诺悖论的分析和批评并非十分成功，是值得重新研究的。

下面来考察芝诺关于运动的4个悖论。引号内的是亚里士多德的《物理学》中的原话，前面的小标题是为了便于研究加上的。

（1）二分说。“运动不存在，理由是：位移事物在达到目的地之前必须先抵达一半处。”J. 伯内特（Burnet）解释说：即不可能在有限的时间内通过无限多个点。在你走完全程之前必须先走过给定距离的一半，为此又必须走过一半的一半，等等，直至无穷。亚里士多德批评芝诺在这里犯了错误：“他主张一个事物不可能在有限的时间里通过无限的事物，或者分别地和无限的事物相接触。须知长度和时间被说成是“无限的”有两种涵义，并且一般地说，一切连续事物被说成是“无限的”都有两种涵义：或分起来的无限，或延伸上的无限。因此，一方面，事物在有限的时间里不能和数量上无限的事物相接触，另一方面，却能和分起来无限的事物相接触，因为时间本身分起来也是无限的。因此，通过一个无限的事物是在无限的时间里而不是在有限的时间里进行的，和无限的事物接触是在无限数的而不是在有限数的现在上进行的。”

（2）阿基里斯（Achilles，荷马史诗《伊里亚特》中的善跑猛将）追龟说。“这个论点的意思是说：一个跑得最快的人永远追不上一个跑得最慢的人。因为追赶者首先必须跑到被追者的起跑点，因此走得慢的人永远领先。”伯内特解释说，当阿基里斯到达乌龟的起跑点时，乌龟已经走在前面一小段路了，阿基里斯又必须赶过这一小段路，而乌龟又向前走了。这样，阿基里斯可无限接近它，但不能追到它。亚里士多德指出这个论证和前面的二分法是一回事。“区别只在于：这里加上的距离不是用二分法划分的。由这个论证得到的结论是：跑得慢的人不可能被赶上。而这个结论是根据和二分法同样的原理得到的——因为在这两个论证里得到的结论都是因为无论以二分法还是以非二分法取量时都达不到终结。在第二个论证里说最快的人也追不上最慢的人，这样说只是把问题说得更明白些罢了——因此，对这个论证的解决方法也必然是同一个

方法.认为在运动中领先的东西不能被追上这个想法是错误的.因为在它领先的时间内是不能被赶上的,但是,如果芝诺允许它能越过所规定的有限的距离的话,那么它也是可以被赶上的."

(3) 飞箭静止说."如果任何事物,当它是在一个和自己大小相同的空间里时(没有越出它),它是静止着.如果位移的事物总是在'现在'里占有这样一个空间,那么飞着的箭是不动的."亚里士多德接着批驳说:"他的这个说法是错误的,因为时间不是由不可分的'现在'组成的,正如别的任何量都不是由不可分的部分组合成的那样."又说:"这个结论是因为把时间当作是由'现在'组成的而引起的,如果不肯定这个前提,这个结论是不会出现的."

现在把这 3 个悖论联系起来分析.诚如亚里士多德所说,阿基里斯追龟说其实可以归结为二分说.按照二分说,阿基里斯在到达乌龟的起跑点之前,必须先走过这段距离的 1/2,为此,又必须先走过 1/4,1/8,等等,即必须在有限的时间内通过无限多个点,因此按芝诺的理由,阿基里斯根本就动弹不了.亚里士多德克服这个困难的办法是说,"时间本身分起来也是无限的";而在解决飞箭静止说时又说,"时间不是由不可分的'现在'组成的,正如别的任何量也都不是由不可分的部分组合成的那样."亚里士多德曾明确地论证过"在时间里确有一种不可分的东西,我们把它称之为'现在'."于是问题的症结在于亚里士多德所说的不可分的"现在"究竟是什么?如果用区间表示时间,所谓"现在"是长度很短的线段呢,还是长度为零的严格的数学上的点?如果是前者,那么时间就是由"现在"组成的,飞箭就是不动的了.亚里士多德的意思显然是指后者.但按照亚里士多德对二分说的分析,线段(距离)被分割为和无限数的"现在"相对应的无限数的点.又按照二分法的含义,这里的无限是可数的,那么,由可数的无限个长度为零的点组成的线段,其长度必为零,这又矛盾了.因此,芝诺悖论揭示的是事物内部的稠密性和连续性之间的区别,是无限可分和有限长度之间的矛盾,亚里士多德没有能觉察到这一点,当然实际上没有能驳倒芝诺.P.汤纳利(Tannery)在 1885 年指出,芝诺悖论所反

对的是那种认为空间是点的总和、时间是瞬刻的总和的概念。换句话说，芝诺并不否认运动，但是他想证明在空间作为点的总和的概念下运动是不可能的。

芝诺的类似观点还表现在他的两个针对"多"的悖论中。其中一个见于失传的芝诺原著的如下一段残篇：

> 如果有许多事物，那就必须与实际存在的事物相符，既不多也不少。可是如果有象这样多的事物，事物(在数目上)就是有限的了。如果有许多事物，存在物(在数目上)就是无穷的。因为在各个事物之间永远有一些别的事物，而在这些事物之间又有别的事物。这样一来，存在物就是无穷的了。

芝诺认为存在若是"多"就会导致无穷的论证，也表达在另一个悖论里。它被辛普里西奥斯至少是部分地逐字逐句记述下来。这些记述不象阿基里斯追龟说和飞箭静止说那样经后人或多或少地修改过，虽然表达得没有那么清楚，但是却更接近于芝诺的原话。辛普里西奥斯在他的引言里说，芝诺首先论证既无"大小"又无厚度的东西是不能存在的。"因为如果这样，它加在某物之上不能使其变大，从某物减去也不能使其变小。但是，如果不能因增加它而使一物增大，也不能因减少它而使一物减小，这就明显地看出，所增加或所减少的是零。"接着就逐字引用以下一段：

> 如果是[这样?]，它就必须每一个部分与别的部分有一定的距离。对于位于这一部分前面的那个部分也是如此。那个部分也会有大小，也会有位于其前面的部分。依此类推，永无止境。这样，它的任何一个部分都不会是最外面的边界，也不会有任何一个部分不分割为其它部分。所以，如果存在是多，那末它必然既是小的又是大的：小会小到没有大小，大会大到无穷。

这段引文比较费解，特别是他只逐字引用了后半部分，以证明大会大到无穷。至于证明小会小到没有大小，芝诺依据的是物体的无限可分性。由此假定出发，他容易证明随着分割的继续，各部分越

来越小,以至将会小到没有止境. 如果有一个最后元素,那就只能是没有大小的"无". 因此, 把任意数目的这些"无"元素加在任何东西上都不会使它增大, 反之从任何东西里减去它们也不会使它变小;当然,把这些"无"元素通通加起来,即使其数目有无限多个,其总和还是"无".上述悖论和关于运动的前三个悖论的共同点,在于假定了空间、时间和物体的无限可分性,实际上还讨论了无穷小和连续性. 芝诺在这里其实还援引了如下两个假设:

i) 无限多个相等的任意小的正量的总和必然是无穷大;

ii) 无限多个没有大小的量的总和仍然是没有大小的量.

其中假设 ii) 是芝诺反对把线段(时间、空间) 看成是一个无限点集(无限多个没有大小的量的总和)的主要依据. 因此解决芝诺悖论的一个关键就是证明假设 ii) 不成立. A. 格兰巴姆 (Grünbaum) 于 1952 年详尽地讨论了这个问题. 他把只含有一个点的子区间定义为退化子区间,从而得出下列结论:

1) 有限区间 (a, b) 是退化子区间的连续统的并集;

2) 每个退化子区间的长度是零;

3) 区间 (a, b) 的长度是 $b-a$;

4) 一个区间的长度不是它的基数的函数.

因此, 芝诺的假设 ii) 不能成立. 事实上, 将一个线段 (或别的量)按二分法进行无限分割,不可能有最后元素. 因为既是无限分割,它就是一个没有最后一项的永远不能完成的过程.在取极限的意义上,按结论 1), 有限区间 (a, b) 成为不可数的无限个退化子区间的并集,这时虽然每个退化子区间(或每个点)的长度为 0,但整个并集的长度不是 0,而是 $b-a$ (按结论 3)). 这样, 作为对芝诺和亚里士多德的回答,时间和距离都是作为无长度元素 (点) 的无穷集合的线性连续统. 换言之,线段是点的无穷集合,而时间是无广延的瞬刻的无穷集合,它们都是线性连续统. 这样, 飞箭静止说这一悖论, 原来指在任一给定的瞬刻是不动的但在由无限多瞬刻组成的连续体上却是动的, 现在转换成一个新的"悖论":由无广延的点组成的无穷集却有广延.

(4) 运动场悖论。"第四个是关于运动场上运动物体的论点：跑道上有两排物体，大小相同且数目相同，一排从终点排到中间点，另一排从中间点排到起点。它们以相同的速度沿相反方向作运动。芝诺认为从这里可以说明：一半时间和整个时间相等".亚里士多德接着指出:"这里错误在于他把一个运动物体经过另一运动物体所花的时间，看做等同于以相同速度经过相同大小的静止物体所花的时间。事实上这两者是不相等的."他的证明可用下面的图解来表示,其中 *A*, *B*, *C* 代表大小相同的物体。



AAAA 为一排静止物体，而 *BBBB* 和 *CCCC* 分别代表以相同速度作相反方向运动的物体。于是当第一个 *B* 到达最末一个 *C* 的同时，第一个 *C* 也达到了最末一个 *B*。这时第一个 *C* 已经经过了所有的 *B*，而第一个 *B* 只经过了所有的 *A* 中的一半。因为经过每个物体的时间是相等的，所以一半时间和整个时间相等。这个错误结论是从上述错误假定得出的。

值得指出的是，这是古代文献中第一个涉及相对运动的问题。在现存的芝诺悖论中，它是唯一的和连续统问题无关的问题。不过也有学者(例如 P. 汤纳利等人)认为它和连续统问题是有着某种联系的。这样，我们一共讨论了六个芝诺悖论。在古代传说中保存下来的还有另外几个据信是属于芝诺的悖论，由于内容不那么深刻，也比较容易解决，这里就不作介绍了。

关于芝诺悖论对于古代希腊数学发展的重要性，在科学史学者中的意见是很不一致的。P. 汤纳利首先提出，芝诺和巴门尼德哲学的关系并不如古代传说中所肯定的那样密切。相比之下，因毕达哥拉斯学派发现不可公度量而出现的一些问题，对于芝诺具有更加深刻的影响.基于同样的假设，H. 赫斯 (Hasse) 和 H. 斯科尔斯 (Scholz) 想把芝诺说成是对古代数学的发展方向起决定影响的人物。他们试图证明，毕达哥拉斯学派曾假定存在无限小

的基本线段(初等线段)，想以此来克服因发现不可公度量而引起的困难。芝诺所反对的正是这种处理无穷小的不准确的做法，从而迫使下一代的毕达哥拉斯学派的数学家去探求更好、更准确的基础。另有一些学者持有完全不同的意见。B. L. 范德瓦尔登(van der Waerden)指出，我们已知的关于公元前五世纪下半叶的数学理论——不可公度量的发现无疑是那个时代作出的——并不支持芝诺曾经对那个时代的数学发展作过任何重大贡献的说法。

虽然芝诺时代已经过去二千四百多年了，但是围绕芝诺的争论还没有休止。不论怎样，人们无须担心芝诺的名字会从数学史上一笔勾销。正如美国数学史家 E. T. 贝尔 (Bell) 所说，芝诺毕竟曾"以非数学的语言，记录下了最早同连续性和无限性格斗的人们所遭遇到的困难。"芝诺的功绩在于把动和静的关系、无限和有限的关系、连续和离散的关系惹人注意地摆了出来，并进行了辩证的考察。虽然不能肯定他对古典希腊数学的发展有无直接的重要影响，但是有一点决不是偶然的巧合：柏拉图写作对话《巴门尼德》篇的时候，因为其中讨论的主要话题之一是芝诺的观点，芝诺也是书中的主角之一，因此在柏拉图学园中很自然地热烈讨论起芝诺悖论来。当时欧多克索斯 (Eudoxus) 正在柏拉图学园中攻读和研究数学与哲学。欧多克索斯在稍后的时间里创立了新的比例论(《几何原本》第五卷中的主要内容)，从而克服了因发现不可公度量而出现的数学危机；并完善了穷竭法，巧妙地处理了无穷小问题。因此，在希腊数学发展的这个关键时刻，很难说芝诺没有对它的发展作出过有意义的贡献。

芝诺在哲学上被亚里士多德誉为辩证法的发明人。黑格尔在他的《哲学史讲演录》中指出："芝诺主要是客观地辩证地考察了运动"，并称芝诺是"辩证法的创始人"。

文　献

[1] Aristotle, Physics (中译本：亚里士多德，物理学，商务印书馆，1982).

[2] Simplicius, Commentary on Aristotle's Physics; tr. A. Wasserstein, *Phronesis*, 4(1959),
[3] H. D. P. Lee, Zeno of Elea, A text with translation and commentary, Cambridge, 1936.
[4] Plato, Parmenides（中译本：柏拉图，巴曼尼得斯篇，陈康译注，商务印书馆，1985）.
[5] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, vol. 1, Oxford, 1921.
[6] "Zeno of Elea" in Encyclopaedia Britainnica, vol. 23, pp. 945—946.
[7] F. Cajori, A history of Zeno's arguments on motion, *American Mathematical Monthly*, vol. XXII, 1915, pp. 1—6.
[8] F. Cajori, The purpose of Zeno's arguments on motion, *Isis*. 3(1920),
[9] H. Fränkel, Zeno of Elea attacks on plurality. *American Journal of Philosophy*, 63(1942), pp. 1—25; pp. 193—206.
[10] A. Grünbaum, A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements, *Philosophy of Science*, 19(1952), 288—305.
[11] B. Russell, The principle of mathematics, vol. i, 1903.
[12] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, 1972（中译本：M. 克莱因，古今数学思想，第1册，1979，上海科学技术出版社）.

安　蒂　丰

王　青　建

（辽宁师范大学）

安蒂丰（Antiphon）　公元前5世纪下半期活跃于希腊雅典。数学、哲学。

安蒂丰被认为是古希腊本土的第一位智人学派成员。该学派兴起于公元前5世纪中叶，主要活动是教授青年修辞、辩论、演说技能和参政治国等本领。由于其成员能言善辩，加上晚期智人流于诡辩，因而有些人又被称为诡辩学者。关于安蒂丰的生平多有疑问，甚至他的身份也未能确认。公元前1世纪的希腊语法学家D. 卡尔辛特斯（Chalcenterus，约公元前80—约前10年）说，公元前5世纪雅典有两位智人学派的安蒂丰。一位是演说家和政治家，约生于公元前480年，是在雅典以雄辩为职业的先驱人物。公元前411年鼓吹反民主改革的"400人会议"，失败后为自己写了一篇辩护演说，约在公元前410年因叛逆罪被处死。他留下的《四部曲》（Tetralogies）等15篇著作，以语言高雅，论理清晰受到赞誉。另一位是预言家和释梦者，经历不详，至少写了4部著作：《论真理》（On turth）、《论和谐》（On concord）、《政治家》（The statesman），《梦的解释》（On interpretation of dreams），还有一部《避痛术》（The art of avoiding pain）可能也是他写的。其中除《论真理》一书的纸草书和其他著作的简短引文流传至今外，大部分著作到公元1世纪后就失传了。

公元2世纪希腊修辞学家赫莫杰尼兹（Hermogenes）也指出这两位安蒂丰的不同。不过他仅仅由于《四部曲》与其他著作在写

作风格上有所不同才提出这一假设的。另外一些学者不同意两位安蒂丰之说，指出他们应当是一个人。公元1世纪的希腊修辞学家瑟西尔耶斯（Caecilius）就是这样认为，他在假冒希腊传记作家普卢塔克(Plutarch，约公元46—119年以后)所著《10位演说家》(Ten orators）中只假定了一个安蒂丰，即认为演说家和释梦者是智人学派中的同一个安蒂丰。如果是这样，则下述的学者安蒂丰就有政治上的经历，且最终卒于公元前约410年。否则，将对其生平一无所知。目前尚未对此做出确切结论。

安蒂丰在数学上的主要贡献是运用穷竭法讨论化圆为方问题，记载于希腊著名学者亚里士多德（Aristotle，公元前384—前322年)所著《物理学》(Physics）一书中。化圆为方问题是求作一正方形，使其面积等于一已知圆。这是古希腊智人学派提出的三大几何作图问题之一，其难处在于作图只许使用直尺（没有刻度，只能作直线的尺)和圆规。设圆的半径为一个单位，则它的面积为 π。化圆为方问题就相当于用尺规作出一个长度为 π 的线段。最早研究这个问题的是古希腊哲学家安纳萨戈拉斯（Anaxagoras)，可惜他的成果没有流传下来。稍后的研究者有希波克拉底（Hippocrates of Chios)、希皮亚斯（Hippias of Elis，约公元前400年)、布里松（Bryson of Heraclea，约公元前450年）等安蒂丰同时代的学者。其中希波克拉底设想将化圆为方归为化由圆弧构成的月牙形为方的问题，但最终并没能解决化圆为方问题，只是将一个圆和一个特殊的月牙形一起化为正方形。希皮亚斯考虑构造一条割圆曲线（quadratrix）三等分角，后人发现这条曲线也可以用来化圆为方，但他的构造方法已超出尺规作图的范围。布里松则声称一个内接于圆的多边形的面积必小于圆的面积，而外切于这个圆的同样形状的多边形的面积必大于其面积，因此就有一个介于这两者大小之间的多边形，它的面积恰好等于这个圆的面积。但对于如何做出这个多边形却没有说明，只假定边数很多时这两个多边形面积的算术平均值就将是圆的面积。这些工作对后来的数学研究都产生一定影响。

安蒂丰化圆为方的方法是由几位注释亚里士多德著作的人给出陈述的。其中较为通行的说法是公元6世纪希腊新柏拉图主义学者辛普利休斯(Simplicius, 约公元530年)的记载：安蒂丰首先做一个内接于圆的正四边形，然后在它的每一个边的上方做两条弦与该段圆弧的中点相交，形成一个正八边形，再在这个正八边形的每一条边上继续这一过程，得到正十六边形，再继续进行下去，又得到正三十二边形，正六十四边形等等，直至正多边形的边长小到恰于它们各自所在的圆周部分重合，就可以完成化圆为方问题。该方法以这样一个定理为前提：任意边数的正多边形都可以通过尺规作图化为正方形。运用毕达哥拉斯学派（公元前6世纪末至公元前4世纪中)发现的“面积贴合”(application of areas)方法可以实现这种作图。另一位新柏拉图主义学者瑟米斯蒂厄斯（Themistius. 约公元 320—390年）的记载稍有不同，说安蒂丰最先做的圆内接正多边形是等边三角形，然后再做正六边形，正十二边形等等，最后的结果也能与圆周重合。

后人对安蒂丰的方法做了大量讨论，一般认为这是穷竭法原理的最早形式。他设立的圆内接正多边形与圆周之间存在着空隙，而当多边形的边数不断加倍时，这些空隙逐渐被“穷竭”了。公元前4世纪希腊数学家欧多克索斯（Eudoxus）受其影响，建立起完善的穷竭法原理，即“对于两个不相等的量，若从较大量中减去大于其半的量，再从所余量中减去大于其半的量，继续重复这一步骤，则所余之量必小于原来较小的量”。欧几里得（Euclid）《几何原本》卷XII专门讲述了穷竭法的应用，其中命题2“圆与圆之比等于其直径平方之比”的证明，使人联想起安蒂丰的方法。稍后的阿基米德（Archimedes)在《论球与圆柱》中引用了欧几里得的证明方法，建立的命题6是：只要边数足够多，圆外切正多边形和圆内接正多边形的面积之差可以任意小。公元263年中国数学家刘徽注释《九章算术》时创立一种“割圆术”，也是采用圆内接正多边形逐次加倍边数来逼近圆周的。其理论根据为“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”。这与安蒂

丰的思想如出一辙。也有人对安蒂丰的方法提出批评，例如亚里士多德就指责说这种方法没有建立在公认的几何原理之上，是不值一驳的。安蒂丰结论的错误正在于此。

安蒂丰的思想与智人学派的哲学伦理传统有关。该学派代表人物普罗泰戈拉(Protagoras, 约公元前 485—约前 410年)提出“人是万物的尺度”,认为人以自身的感觉获得知识，信奉现象世界的真实性。当人们用眼睛看圆的切线时,看到的切点并不是一个点，而是一系列点。因此安蒂丰似乎认为圆本身是一个具有很大数量(也可能为无穷)边的多边形，通过不断加倍边数的方法就可以使多边形与之贴合。他对现象世界的认识在幸存的两卷本《论真理》中有所阐发,但因流传多讹已很少有人确信了。

从现存的安蒂丰著作残片中得知，安蒂丰论述过宇宙的物质运动和天体的自然现象，例如将太阳的升落与地球周围空气的变化相联系；认为月球自身发光，月食是由于它某种旋转形成的现象；认为基本物质元素具有相对性(例如热与冷)等等。其中最著名的观点是自然与习俗(或常规、约法)的对立。他反对为那些人为的“自然”素材而虚构的文章,又常偏爱以自然状态存在的事物，并因而提出个体的“自然”动力说作为超越社会法规的准则。但在《论和谐》中他又为社会权力辩护，说它是反对无政府主义的保护措施。还说和谐的理想和自我约束存在于社会与个体心灵两者之中。他的这些观点正是智人学派的基本思想。其中对主体与客体的探索和对思维与存在之间的差异的揭示，在西方哲学史上有一定的积极意义和进步作用。

文　献

原始文献

[1] H. Diels and W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker, 7th ed., II, Berlin, 1954, pp. 334—370.

[2] A. Battegazzore and M. Untersteiner, Sofisti, testimonianze e frammenti, Florence, 1962.

[3] K. Freeman, Ancilla to the pre-Socratic philosophers, Oxford, 1948.

[4] K. J. Maidment Minor Attic orators, vol. 1. London–New York, 1941.

研究文献

[5] E. Bignone, Studi sul pensiero antico, Naples, 1938.

[6] M. Untersteiner. The sophists, Oxford. 1954.

[7] G. B. Kerferd, Antiphon, Dictonary, of scientific biography vol. 1, Charles Scribner's Son-Publishers. 1970, pp. 170—172.

[8] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Dublin-London, 1889; Arno Press, New York 重印, 1976.

[9] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[10] B. L. van der Waerden, Science awakening, P. Noordhoff Ltd, 1954.

希波克拉底

王 青 建

(辽宁师范大学)

希波克拉底 (Hippocrates of Chios) 生于希俄斯(Chios),公元前5世纪下半叶活动于雅典.数学、天文学.

古希腊有两个希波克拉底生活在同一时代.一位生于爱琴海东岸附近的科斯岛,叫科斯的希波克拉底 (Hippocrates of Cos, 公元前 460—约前 370 年).他到过雅典等许多地方教书,后来成为著名的医生.下述的另一位也生于爱琴海东岸附近的一个岛上,叫希俄斯的希波克拉底,约公元前 430 年在雅典从事教学活动,是数学家和天文学家,在几何学上做出许多贡献.

希波克拉底没有确切生平史料留传下来,关于他的经历只有零星记载.传记作家普卢塔克(Plutarch, 约公元 46—119 年以后)说,希波克拉底象泰勒斯(Thales of Miletus, 约公元前625—约前547年)一样从事过商业活动.亚里士多德(Aristotle, 公元前384—前322年)说,希波克拉底虽然是一个熟练的几何学家,但在其他方面显得软弱和迟钝.据说,由于他的天真无知,在拜占庭(今土耳其的伊斯坦布尔)被收税人骗去了一大笔钱.哲学家、神学家 J. 菲洛波努斯 (Philoponus, 5 世纪末—6 世纪下半叶)在注释亚里士多德的《物理学》(Physica) 时说,希波克拉底经商时落人海盗手中,财产丧失殆尽.他到雅典去控告海盗,耽搁了很长时间,其间常到学校听课,熟练掌握了几何学知识,并力图解决化圆为方问题,取得重要成果.哲学家、科学史家欧德莫斯 (Eudemus of

Rhodes，公元前 4 世纪)著有《几何学史》(History of geometry)一书，其概要由公元 5 世纪的希腊学者普罗克洛斯 (Proclus，约公元410—485年)引述保存了下来．其中提到，希波克拉底是在安那萨戈拉斯(Anaxagoras，约公元前 500—约前 428年)和天文学家伊诺皮迪斯(Oenopides of Chios，公元前 5 世纪)之后，与西奥多罗斯(Theodorus of Cyrene，约公元前 465—前 399 年)同时期的数学家，是《几何原本》(Elements)的第一个作者．数学史家 G. J. 奥尔曼 (Allman，1824—1904) 据此推断出希波克拉底活动于公元前 5 世纪下半叶，可能比苏格拉底 (Socrates，约公元前 470—前 399 年)稍年长．

希波克拉底的出生地希俄斯在毕达哥拉斯 (Pythagoras，约公元前 560—约前 480 年)的出生地萨摩斯岛 (Samos) 附近．当时那里学术繁荣，也是毕达哥拉斯学派的主要发源地．因此数学史家 P. 唐内里 (Tannery，1843—1904) 等人推测，希波克拉底早在家乡时就学习了数学，到雅典后就以教授数学为生了，而且他可能受到毕达哥拉斯学派的影响．希波克拉底到达雅典的时期正是毕达哥拉斯学派昌盛时期，那里是整个希腊数学研究的中心．伊安布利霍斯 (Iamblichus，约公元 250—约 330 年)在写毕达哥拉斯传记时提到希波克拉底和西奥多罗斯泄露了毕达哥拉斯学派的几何秘密，并因此引起数学的发展．

化月牙形为方

化月牙形为方是希波克拉底以几何学家著称的主要原因．他发现由凹向同一边的两个圆弧相交构成的月牙形的面积．可以同一个直线图形面积相等，继而可以同一个正方形面积相等．他还将一个月牙形和一个圆一起化为正方形，并认为，通过这种步骤，就解决了化圆为方问题．这一成果最早是由欧德莫斯在《几何学史》中记载下来的，可惜他的原著失传了．公元 5 世纪普罗克洛斯评注这本书时提到希波克拉底的工作，但没给出具体方法．直到

公元 6 世纪，新柏拉图主义学者辛普利休斯（Simplicius，约公元 530 年）重新注释亚里士多德的《物理学》一书时，才第一次陈述了希波克拉底的方法。但他声称这依赖于欧德莫斯的原著，并且是逐字翻译过来的，只是为了便于表述，个别地方参考了欧几里得的《几何原本》。

辛普利休斯首先叙述了两种简单情况，这是由哲学家亚历山大（Alexander of Aphrodisias，活跃于公元前 200 年左右）记载并归功于希波克拉底的。在图 1 中，AB 是半圆 ACB 的直径，D 是圆心。$AC=BC$，AEC 是以 AC 为直径的半圆，则月牙形 $AECF$ 的面积与三角形 ACD 的面积相等。在图 2 中，AB 是半圆 ALB 的直径，CD 是半圆 $CEFD$ 的直径，$CD=2AB$，$CE=EF=FD$，CGE，EHF，FKD 分别是以 CE，EF，FD 为直径的半圆，则月牙形 $CGEM$，$EHFN$，$FKDO$ 与半圆 ALB 的面积之和与梯形 $CEFD$ 的面积相等。

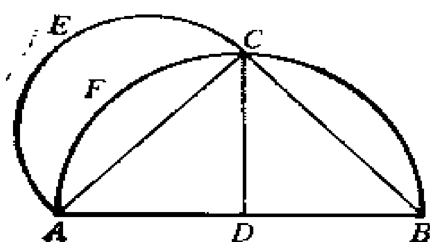


图 1

辛普利休斯继续引用欧德莫斯的原文：希波克拉底的理论基础是他叙述的一个定理，“圆上相似弓形的面积之比等于它们底边的平方之比”。其证明依赖于“两个圆面积之比等于它们直径的平方之比”。他分三种情况论述化月牙形为方的方法：

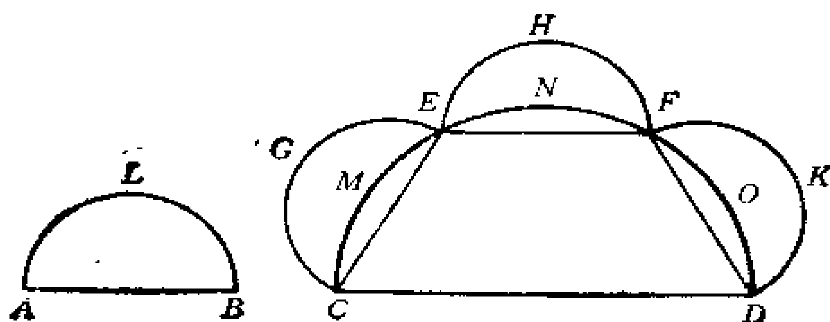


图 2

（1）当月牙形的外部圆周等于半圆时，如图 3 所示，作一个内接于半圆的等腰直角三角形，在底边上做一个与其他两边和圆周所成弓形相似的弓形，则它的面积等于其他两个弓形的面积之和，因此图形中的月牙形的面积就等于三角形的面积。

（2）当月牙形的外部圆周大于半圆时，如图 4 所示，$AB=AC=CD$，$AC/\!/BD$，$BD^2=3AB^2$，以 BD 为底做一个与其它三边和圆周所成弓形相似的弓形，则它的面积等于其它三个弓形面积的和。因此月牙形 $BACD$ 的面积等于梯形的面积。

（3）当月牙形的外部圆周小于半圆时，如图 5 所示，AB 是半圆的直径。K 为圆心。C 是 KB 的中点，$CD\perp$

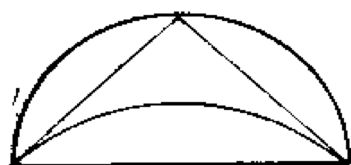


图 3

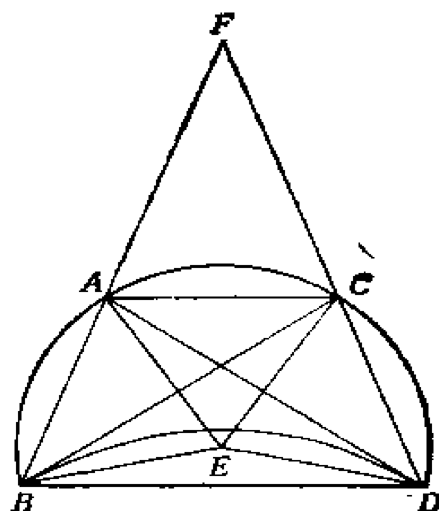


图 4

BK，做直线 EF 通过 CD 和 B 点(原文是 EF 在 CD 与圆周之间趋向于 B）且使 $EF^2=3/2KA^2$，作 $EG/\!/AB$，ED 交 CD 于 D，$ED=DG$，则弓形 $EKBG$ 外接于梯形 $EKBG$，又作弓形 EFG，形成一个外圆周小于半圆的月牙形 $EKBGFE$。易证

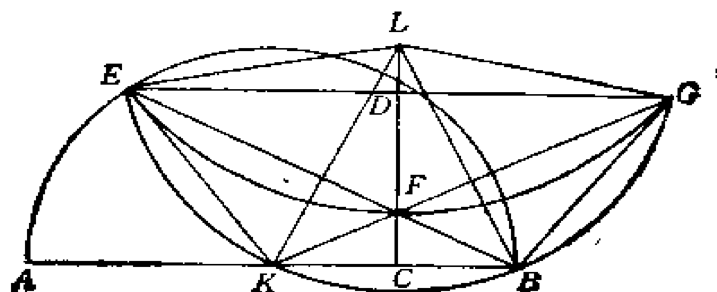


图 5

它的面积等于三个三角形 BFG，BFK，EKF 面积之和。

最后，希波克拉底将一个月牙形和一个圆一起化为正方形。设 K 为两个同心圆的中心，外圆直径的平方是内圆直径平方的6倍。$ABCDEF$ 是内接于内圆的正六边形。GH，HI 是外圆上的内接正六边形的两个边。在 GI 上作一个与 GH 和外圆周构成的弓形相似的弓形。希波克拉底证明了月牙形 GHI 和内圆（面积）之和等于三角形 GHI 和正六边形 $ABCDEF$（面积）之和。

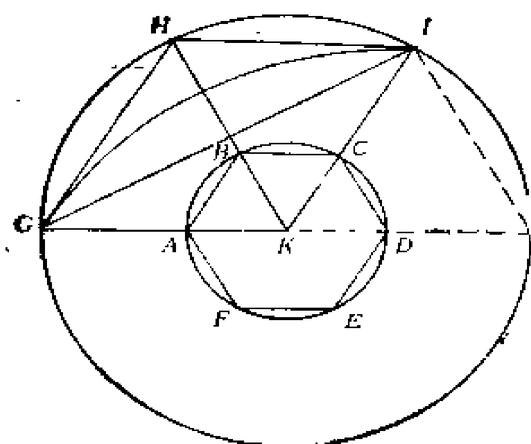


图 6

从以上推理可以看出希波克拉底并没能解决所有月牙形化为正方形的问题，只是能将三类月牙形（外部圆周大于、等于和小于半圆的月牙形）每一类中的一种特殊情况化为正方形。而且他也没能解决化圆为方问题，只能将另外一种月牙形与一个圆一起化为正方形，而这种月牙形又不是前面已解决了的特殊情形。近代数学家用三角学方法证明，能够通过尺规作图化为正方形的月牙形一共只有5种，希波克拉底已解决了其中的3种。化圆为方已被证明是尺规作图不可能问题，但希波克拉底在解决这一问题的过程中使用的方法和显示出的几何学知识却长期为人称道。

倍立方与分析方法

倍立方问题是与化圆为方问题齐名的几何三大问题之一，其流传由来已久。但直到希波克拉底着手研究它之前一直没有什么进展。公元5世纪末的欧托基奥斯（Eutocius of Ascalon，约公元480年）在注释阿基米德著作时记述说，埃拉托塞尼（Eratosthenes,

约公元前276—约前195年)将倍立方问题研究的突破归功于希波克拉底，说他第一个将这一问题简化为求两个已知线段中的两个比例中项问题. 用现代符号表示，如果 a, b 是两个已知线段，x, y 是其间的两个比例中项，即 $a:x = x:y = y:b$，则有 $a^3:x^3 = a:b$，如果 $b = 2a$，则 $x^3 = 2a^3$，表示以 x 为边的立方体的体积是以 a 为边的立方体体积的两倍. 普罗克洛斯也指出，希波克拉底是第一个将几何上求解困难的问题实行简化的数学家. 从此以后，求作这种比例中项成了解决倍立方问题的唯一途径，许多数学家在这方面取得成果.

希波克拉底研究化圆为方和倍立方问题的方法引起人们的注意. 他将一个较复杂的问题通过简化成为一个较简单的或已经解决了的问题，这种方法被称为分析的方法. 希波克拉底是较早在几何上使用分析方法的数学家，倍立方问题的简化就是一个成功的实例. 不过也有人说，毕达哥拉斯学派数的理论中有求两立方数间的两个比例中项的命题，希波克拉底只是给出了一种它在几何上的应用.

几 何 原 理

普洛克洛斯在复述欧德莫斯《几何学史》概要时指出，希波克拉底是第一个汇编有关几何原理著作的希腊学者. 这部著作虽然没有流传下来，但欧几里得在编撰《几何原本》一书时，在内容及体例上都可能以它为借鉴.

分析希波克拉底的工作可以看出，《几何原本》中的许多定理已为希波克拉底所知. 例如直角三角形直角对边上的正方形等于其它两边上正方形之和；在钝角三角形中，钝角对边上的正方形大于其他两边上的正方形之和等等. 他还掌握了以下问题的解答：化已知直线图形为正方形；作一直线(段)，使它上面的正方形三倍于已知线(段)上的正方形；作一个梯形，使它的一个底等于两个已知线中的较长的线，其余三个边均等于较短的线，等等.

希波克拉底在化月牙形为方的第3种情况中涉及到方程 $x^2+\sqrt{3/2}x=r^2$ 的求解，它已由毕达哥拉斯学派解决，属于所谓"几何代数"的范围。希波克拉底及同代数学家难免受到该学派的影响。由于毕达哥拉斯学派在圆的几何学上贡献较少，因此希波克拉底有可能自己发现许多有关定理和方法。例如：圆的相似弓形含有相等的角；半圆上的角是直角，大于半圆的弓形上的角是锐角，小于半圆的弓形上的角是钝角；内接于一个圆的正六边形的边长等于该圆的半径；作一个已知三角形的内接圆；作一个等腰梯形的外接圆；在已知线段上作一个与已知弓形相似的弓形等等。

以上内容都由欧几里得收入《几何原本》的前4卷中。数学史家推断，它们也都包含于希波克拉底的几何原理著作中。由于毕达哥拉斯学派对数的理论造诣颇深，希波克拉底的这部著作还应该包含有《几何原本》卷 VI-IX 中的内容。此外倍立方问题的研究还显示了他对立体几何的兴趣，毕达哥拉斯学派亦论述过正多面体问题，因此作为几何汇编，希波克拉底的著作可能也包含有《几何原本》卷 XI、卷 XIII 的内容。《几何原本》卷V为一般比例论，卷X是无理量的一般理论，都建立在希波克拉底之后，故在他的著作中不会论及。但卷 XII 中的穷竭法却使人联系起化月牙形为方时依据的定理"圆上相似的弓形的面积之比等于它们底边的平方比"，它的证明依赖于欧几里得用穷竭法证明的命题：圆与圆之比等于其直径的平方之比。一般认为希波克拉底不只是直观地认识到这一命题的正确性，还对此作了进一步的研究，并记载于他的著作中。在希波克拉底之后，勒俄（Leo 或 Leon，公元前4世纪上半叶），修迪奥斯（Theudius of Magnesia，公元前4世纪）等人也做过几何学的综合整理工作，但到欧几里得《几何原本》问世后，这一切都被湮没了。

由于化月牙形为方在数学证明上没有后继结果，即由它并没有导出新的数学命题，因此《几何原本》中未包括这一内容。但也有数学史家推测希波克拉底原来就没有把化月牙形为方记在他的几何原理著作中，而是单独写了一部有关论著。从希波克拉底直接

使用一些定理或命题来看这种说法也有道理，只是论著本身都失传了。

天　文　学

希波克拉底的出生地希俄斯因为出了天文学家伊诺皮迪斯而被认为在当时是天文学研究的中心。希波克拉底可能也受过天文学教育。亚里士多德在他的著作《气象学》（Meteorologica）中记载了希波克拉底关于彗星和星系的一些论述。当时毕达哥拉斯学派认为彗星只有一个，经过长时间间隔后才能在靠近水平线处看到它。希波克拉底及其学生以类似方式解释了彗星现象，认为彗星尾巴不是什么物质构成的，而是在它漫游到太阳附近时，偶而因潮气停留使我们的目光偏向太阳时出现的一种现象。他还举了一个例子支持这一观点，将一根枝条的一部分浸在水中，则看起来枝条就象断了一样，并说彗尾是以同样方式形成的．对于彗星出现的次数稀少，他解释说，只有彗星在北方时才有形成彗尾的条件，而这种机会是很少的。亚里士多德著作的注释者还将一种银河形成理论归于希波克拉底，即银河象彗星出现一样，是因为潮气使我们的目光偏向太阳所致。

文　献

[1] Simplicius, In Aristotelis physicorum libros quattuor priores commentaria, H. Diels ed., Commentaria in Aristotelem graeca, IX, Berlin, 1882.

[2] Aristotle, Meteorologicorum libri quattuor, Fobes ed., Cambridge, Mass., 1918.

[3] M. T. Cardini, Pitagorici, testimonianze e frammenti, fasc. 2, Bibliotheca di studi superiori, XLI Florence, 1962.

[4] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Dublin-London, 1889; Arno Press, A New York Time Company, 1976.

[5] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[6] B. L. van der Waerden, Science awakening, P. Noordhoff Ltd, Holland, 1954.

[7] P. Tannery, Hippocrate de Chio et al quadrature des lunes, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*. 2nd ser., 2(1878),

pp. 179—184

[8] I. Bulmer-Thomas, Hippocrates of Chios, Dictionary of Scientific Biography, vol. VI, Charles Scribner's Son-Publishers, 1972, pp. 410—418.

[9] G. Loria, Le scienze esatte nell'antica Grecia, Milano, 2 ed., 1914, pp. 74—94.

阿尔希塔斯

王 青 建

(辽宁师范大学)

阿尔希塔斯(Archytas of Tarentum) 公元前375年前后活跃于意大利塔林敦(Tarentum,今塔兰托).哲学、数学、物理学.

阿尔希塔斯是古希腊毕达哥拉斯学派晚期的重要成员.该学派兴起于公元前6世纪末,有严密的组织纪律,共同的哲学信仰和政治思想,对数学等多种学科做出过很大贡献.公元前5世纪,因敌对派的反对和民主风暴的冲击,毕达哥拉斯本人被暴徒杀害,学派人员散失,主要活动场所遭破坏.一部分成员流落到意大利南部沿海的塔林敦定居,在那里继续进行数学、哲学研究及政治活动.后来塔林敦成为毕达哥拉斯学派晚期仅存的重要政治中心,其中的组织者和代表人物就是阿尔希塔斯.

阿尔希塔斯是古希腊著名哲学家柏拉图(Plato)同时代的人.曾一度为柏拉图的老师,使柏拉图深受毕达哥拉斯学派思想的影响.他们二人还是莫逆之交.据说当柏拉图在公元前361年前后遭到叙拉古(Syracusan,今锡拉库萨)统治者狄奥尼西奥斯(小)(Dionysius,公元前367年即位)治罪时,阿尔希塔斯写信挽救了柏拉图的性命.

阿尔希塔斯的生卒年代没有确切记载.数学史家G. J. 奥尔曼(Allman, 1824—1904)指出他可能比柏拉图年长.另一希腊数学史专家T. L. 希思(Heath, 1861—1940)则只标明了他的活跃年代:约公元前400年到公元前365年之间,这是比较慎重

的做法.阿尔希塔斯早年曾师事毕达哥拉斯学派的菲洛劳斯(Philolaus, 约公元前 425 年),后来成为该学派的骨干.他在政治上是一个重要人物, 曾受大希腊 (Magna Graecia, 今意大利南部一带) 地区希腊城邦联盟的指派, 当了七年的军事首领. 按一般法律,这种任职不得超过一年,而阿尔希塔斯不仅能连任, 还当选为军事总指挥. 据说在他任职期间从未有过败迹. 一些轶闻对他的品德大加赞扬, 说他对待家里的奴隶及其子女都很仁慈. 亚里士多德在《政治学》(Politics) 中记载说, 阿尔希塔斯发明了一种类似拨郎鼓的玩具,专供幼儿娱乐. 罗马诗人霍勒斯 (Horace, 公元前 65 一前 8 年) 在《颂歌集》(Ode) 中称赞阿尔希塔斯是一个卓越的算术学家、几何学家和天文学家, 并说他是在亚得里亚海 (Adriatic Sea) 的一次船只失事中不幸遇难的.

阿尔希塔斯著述甚丰, 但流传下来的很少. 据亚里士多德记载,他至少写过三部哲学著作,后来失传了. 另有一些署名阿尔希塔斯的非数学著作幸存下来,但对其真伪仍有争议.希腊作家第欧根尼(Diogenes Laertius, 公元 3 世纪)在他的著名哲学家传记 10 卷本中指出, 阿尔希塔斯是第一个基于数学原理写成力学系统论文的作者, 还说他曾应用机械运动原理解决几何问题. 罗马建筑师和工程师维特鲁维厄斯 (Vitruvius, 公元前 1 世纪) 在《建筑学》(De architectura) 中说阿尔希塔斯写过机械学方面的著作. 虽然这些论著没有完整地保存下来, 但通过一些现存残篇和后继学者的记载获知, 他对数学及应用数学的其他学科的贡献是很大的.

阿尔希塔斯对四种涉及数学的科学作了区分: 几何、算术、天文(称为天体或球体 (sphaeric)) 和音乐,他认为这都是使用数学的学科. 例如, 在天文学中数学家已给出有关天体的运行速度及其升落的清晰表述,球体的性质已足以解释天球的运动;在音乐中可以用比例论确定音阶等等. 这种学科分类的思想由公元 6 世纪的罗马学者 A. M. S. 博伊西斯 (Boethius) 继承发扬, 称之为"四道"(quadrivium). 中世纪创办大学后,这四门学科长期被列

为大学的高级科目.

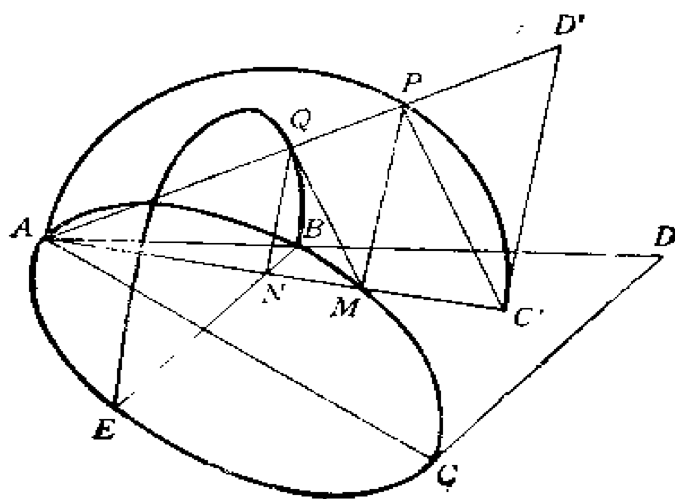
平均值理论和比例理论是阿尔希塔斯对数学的主要贡献. 他讨论了三种平均值:算术平均($a-b=b-c$ 或 $a+c=2b$),几何平均($a:b=b:c$ 或 $ac=b^2$)和调和平均($(a-b):(b-c)=a:c$ 或 $2ac=b(a+c)$). 其中的调和平均原称为"次相反平均"(sub-contrary mean),构成这种平均的三个数 a, b, c 的倒数成等差数列. 由于在音乐中符合这种关系的几个音调一起弹奏比较悦耳,阿尔希塔斯便采用了调和(亦称谐和)(harmonic)这一名称. 从阿尔希塔斯的残篇中得知,他在比例论中论述过一种重要性质,即差数为 1 的两数之间没有几何平均值. 当时毕达哥拉斯学派不承认无理数(称之为不可公度量或不可通约量),他们所讨论的比率和比例仅限于整数或分数. 阿尔希塔斯的结论及证明由博伊西斯在他的《音乐入门》(De institutione musica)中译为拉丁文保存了下来. 在此之前欧几里得(Euclid)写的一本有关音乐理论的书中也记载这种性质及其证明,但与阿尔希塔斯的方法稍有不同,时间上也晚许多. 欧几里得《几何原本》(Elements)卷 VII,VIII,IX 的内容是数论,阐述关于整数与整数之比的性质,数学史家经过研究发现,其中许多性质早在欧几里得之前,甚至阿尔希塔斯之前就已被应用,但卷 VIII 中的大多数性质和证明是由阿尔希塔斯及其合作者发现的.

阿尔希塔斯最著名的数学贡献是倍立方问题的求解. 倍立方问题是:求作一立方体,使其体积等于已知立方体体积的两倍.它最早起源于神话传说,由建筑立方体形状的祭坛或坟墓产生的.后来成为希腊三大几何作图问题之一广泛流传. 现在已证明,如果作图工具只限于直尺和圆规,倍立方问题是几何作图不可能问题.但如果放宽作图工具的限制,它是可以进行几何作图的.仅古希腊就流传下来多种解答方法. 例如柏拉图的直角尺解法;门奈赫莫斯(Menaechmus,约公元前 350 年)的圆锥曲线解法等等.而阿尔希塔斯则是利用三维空间的立体模型解决了倍立方问题,成为较早研究这一问题且取得成功的数学家. 约公元前 3 世纪末希腊数

学家、天文学家和地理学家埃拉托塞尼（Eratosthenes）在一封信中记载了这件事．公元后3世纪第欧根尼也提到阿尔希塔斯的这一贡献．到公元5世纪末，希腊数学家欧托基奥斯（Eutocius of Ascalon，约480年）在注释阿基米德（Archimedes）著作《论球与圆柱》（On the sphere and cylinder）时详细阐述了阿尔希塔斯的方法，不过他申明，这种阐述依据的是古希腊哲学家、科学史家欧德莫斯（Eudemus of Rhods，公元前4世纪）的著作《几何学史》（History of geometry）．该书内容被后人广泛引用，但原书却失传了．此外，希腊传记作家普卢塔克（Plutarch，约公元46—119年以后）在著作中说阿尔希塔斯为了解决倍立方问题使用了一些作图仪器．

倍立方问题研究的第一步进展是由毕达哥拉斯学派的成员希波克拉底（Hippocrates of Chios）做出的．他将这个问题归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个等比中项问题．设 x，y 是这两个中项，$a:x=x:y=y:2a$，则有 $x^3=2a^3$，如果 a 是已知立方体的边，那么 x 就是所求立方体的边．阿尔希塔斯及其后继数学家都沿着这一方向进行工作．他的求等比中项的方法被认为是最著名的解法，而且得到的结论更一般：任给两个数（或线段），都可以求出它们的等比中项．

阿尔希塔斯的方法陈述如下：



设 AC，AB 是两个已知线段，以 AC 为直径作一个圆．设 AB 是该圆的一条弦．又以 AC 为直径，作一个与 ABC 所在平面垂直的半圆，并将它绕通过 A 点且与 ABC 平面垂直的直线旋转，形成一个内径为零的半环面．再以半圆 ABC 为底作一个直半圆柱，与该半环面交于一条曲线．

设 CD 是圆 ABC 通过 C 点的切线，交 AB 延长线于 D．将三角形 ADC 以 AC 为轴进行旋转，生成一直圆锥面．点 B 的轨迹形成一个垂直于 ABC 平面的半圆，且以 BE 为直径，BE 垂直于 AC．该锥面与直半圆柱和半环面确定的曲线交于一点 P．

设 APC' 是形成半环面时旋转到 P 点的半圆，AC' 交圆 ABC 于 M．联结 PM，因为 P 在以 ABC 为底的直半圆柱上，所以 PM 垂直于 ABC 平面．联结 AP 交半圆 BQE 于 Q，联结 AC' 交 BE 于 N，联结 PC'，QM，QN．由于半圆 APC，BQE 都垂直于 ABC 平面．因此它们的交线 QN 也垂直于 ABC 平面，所以 QN 垂直于 BE．由此可以推出 $QN^2=BN\cdot NE=AN\cdot NM$，因此角 AQM 为直角．但角 APC' 也是直角，因此 MQ 平行于 $C'P$．在相似三角形中有 $C'A:AP=AP:AM=AM:AQ$，即有 $AC:AP=AP:AM=AM:AB$，这说明 AB，AM，AP，AC 成等比数列，AM，AP 是所求的两个等比中项．如果 $AC=2AB$，则有 $AM^3=2AB^3$，倍立方问题得到解决．

从阿尔希塔斯的方法中可以看出，他在几何学上已有较深的造诣．例如他的推理中蕴含有：直角三角形斜边垂线的性质；直角三角形的垂线判定法则；圆的相交弦定理；同弦(弧)上圆周角相等的性质；直线与平面，直线与直线垂直的判定定理等等．他还具有三维空间几何轨迹的正确概念，能通过轨迹的相交确定点，并开始圆锥截线的初步研究．这些知识是古希腊几何学的重要组成部分．

博伊西斯在《几何学》(Geometria)一书中将一种表示勾股数的方法归功于阿尔希塔斯．该方法不同于毕达哥拉斯表示勾股数的方法．先设一个偶数 m，则 m，$\left(\frac{m}{2}\right)^2-1$，$\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$ 构成

一组勾股数.普罗克洛斯（Proclus）等人将它称为柏拉图法则，但数学家和数学史家都注意到柏拉图的许多思想来自毕达哥拉斯学派，而阿尔希塔斯在当时是该学派最有影响的学者，因此博伊西斯的结论不无道理。

阿尔希塔斯应用他的平均值方法在音乐理论中取得很多成果，被托勒密（Ptolemy）誉为毕达哥拉斯学派最重要的音乐理论家。他从八音度弦长之比 1:2 或 6:12 开始，取两个数的算术平均值得 9，调和平均值得 8，则比值 6:9 = 8:12 或 2:3，构成第五音阶.比值 6:8 = 9:12 = 3:4 为第 4 音阶.同理，取第 5 音阶弦长比值的两个数做算术平均值和调和平均值，可得比值 4:5 与 5:6，成为大调式第 3 音阶和小调式第 3 音阶的音程。取第 4 音阶弦长比值的两个数进行同一过程，可得比值 6:7 与 7:8，为小调式第 3 音阶减音和全音上的增音。据此，阿尔希塔斯建立了三种音阶：等音阶，半音阶和全音阶。由于已知在差数为 1 的两数之间没有(有理的)几何平均值，因此他仅通过算术平均值和调和平均值将音程细分，而没有用通常的几何平均值。

从阿尔希塔斯现存最长的著作残篇中得知，他还通过观察详述过声音的物理原理。结论是：较快的运动产生较高的音调。因此，唱歌时快速发声或突然发声比慢慢发声的音调要高。他举了一个例子：吹长笛时，靠近嘴的洞打开时的音调要比较远的洞打开时的音调高.阿尔希塔斯推测音调的高低与空气的压力有关，压力高时空气运动的速度就快。他在进一步推理时犯了逻辑上的错误，把产生声音时物体运动的速度与声音传播的速度相混淆，断言高音调的声音比低音调声音能更快地抵达听者的耳朵，这样与他所阐述的音乐理论也不一致了。

阿尔希塔斯的其他贡献散见于各种文献，如罗马作家 A.格利乌斯（Gellius，约公元 123—约 165 年)在著作中说他用木头做了一只会飞的机械鸽子；古希腊学者辛普利休斯（Simplicius，约公元 530 年)记载了他关于宇宙无限论的叙述等等。

文　献

原始文献

[1] H. Diels and W. Kranz, Fragmente der Vorsokratiker, 6th ed., Berlin, 1951.

研究文献

[2] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Dublin-London, 1889; Arno Press, New York 重印, 1976.

[3] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[4] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[5] K. von Fritz, Archytas of Tarentum, Dictionary of scientific biography, vol. I, Charles Scribner's Son-Publishers, 1970, pp. 231—233.

[6] P. Tannery, Mémoires scientifiques, III, Paris, 1915.

[7] M. T. Cardini, Pitagorici, Testimonianze e frammenti, II, Florence, 1962, pp. 226—384.

[8] B. L. van der Waerden, Science awakening, P. Noordhoff Ltd, 1954.

[9] B. L. van der Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, *Hermes*, **78** (1943), 184 ff.

柏　拉　图

周　焕　山

（江苏教育学院）

柏拉图（Plato）　公元前 427 年生于雅典；公元前 347 年卒于雅典。认识论、数学哲学、数学教育。

柏拉图出生于雅典的显贵世家。父亲阿里斯顿（Ariston）据信是雅典历史上最后一个君主科德罗斯（Codrus）的后裔；母亲珮里克蒂妮（Perictione）的先辈可以上溯到公元前 7 世纪的雅典执政官德罗彼得（Dropides），据说他是被称为七贤之一的著名政治家和诗人梭伦（Solon）的兄弟。柏拉图有两个年纪比他大得多的哥哥：阿得曼图（Adeimantus）和格洛康（Glaucon），还有一个如姐波托尼（Potone），其子斯标西波（Speusippus）后来成为柏拉图的继承人。

柏拉图幼年丧父，之后母亲改嫁。继父皮里兰佩（Pyrilampes）是建设民主政体的杰出政治家柏里克利（Pericles）的亲密助手，曾作为雅典使节被派往波斯等国，在国家事务中起过引人注目的作用。他的堂舅克里底亚（Critias）思想机敏，给柏拉图留下深刻的印象。在柏拉图的著作中，曾多次用颂扬的口吻满怀眷恋地提到他的继父、兄弟和其他亲属。他的著作的一些篇名如《克里底亚》等，就是以亲属的名字命名的。

柏拉图自幼受到良好而完备的教育，少年时代勤奋好学、多才多艺，且体格健壮。他写过抒情诗和悲剧，也参加过摔交等激烈运动，除去家庭的熏陶之外，给他影响最为深远的莫过于正直善辩的哲学家苏格拉底（Socrates）了。苏格拉底是柏拉图一家的老朋友，

交往密切，所以，柏拉图很可能从小就认识苏格拉底。但是，热心追随苏格拉底则是从20岁时开始的。从此，苏格拉底成为柏拉图心目中最敬仰的导师。他在后来的著作中多次称苏格拉底是“人世间最有智慧的人”。

公元前404年，雅典在长达28年之久的伯罗奔尼撒战争之后被迫向斯巴达投降。柏拉图目睹了奴隶主民主政体的垮台，取而代之的是以他的堂舅克里底亚为首的史称“三十僭主”的专制政体，他的舅舅查密迪斯（Charmides）也成为“三十僭主”的成员之一。虽然这些亲戚们一上台就立即邀请柏拉图参加其行列，而且他也久怀从政的愿望，但是他没有响应。事态的发展迅速表明，“三十僭主”政体的所作所为，倒使得原先的民主政体在相比之下显得象一个黄金时代。他们滥杀无辜，任意剥夺，甚至老朋友也不放过，连正直的苏格拉底也险遭陷害。不到八个月，“三十僭主”的暴政就被推翻，克里底亚和查密迪斯也死于战乱，这一切都使柏拉图感到悲愤和失望。

在“三十僭主”垮台、民主派领袖恢复执政之后，尽管采取了比较温和、不施报复的政策，一些政客却指控苏格拉底犯有不敬神和蛊惑青年的罪名，并被处死。在苏格拉底受审时，柏拉图和他的哥哥阿德曼图曾去法庭聆听苏格拉底的雄辩、无畏的申辩词，并在他的早期著作《申辩》篇中记录了这件事。这一悲剧给柏拉图以极大的刺激，使得在他心中复萌的从政愿望熄灭了。随着年岁的增长，他对当时的政客、法典和习俗越来越感到厌恶，从而决心继承苏格拉底的哲学思想，开始撰写以苏格拉底为主人公的《对话》，并从事于缔造理想国家的理论研究。

苏格拉底死后，柏拉图离开雅典，退避到欧几里得（Euclid）的家乡麦加拉。欧几里得是麦加拉学派的首领，他信奉苏格拉底的伦理学，“把善说成是普遍意义下的绝对本质”。黑格尔在谈到麦加拉学派时说：“他们曾经在一切观念中指出矛盾，这是他们的好辩”。柏拉图对于这种“好辩”似乎不太热心，转而对科学产生兴趣。离开麦加拉以后，他开始了长途游历。先后去过埃及、昔勒尼

(Cyrene)、意大利南部和西西里等地。在昔勒尼，他在著名数学家德俄多儒（Theodorus）的指导下，特别钻研了数学。在意大利南部的塔林敦（Tarentum），他结交了当时毕达哥拉斯学派的主要代表人物阿尔希塔斯（Archytas）。阿尔希塔斯在数学和力学上的造诣，他所维持的毕达哥拉斯学派的教育制度，都给柏拉图留下深刻的印象。在西西里岛的叙拉古，柏拉图结识了年青的狄昂(Dion，约公元前408—前354年)。狄昂是叙拉古僭主狄俄尼索(Dionysuis）的姻亲，他厌恶上层社会的奢侈淫逸的生活，虔诚地接受了柏拉图的哲学观点，成为追随柏拉图的忠实信徒。在柏拉图的第七封信札中提到过这次旅行，他说，40岁时他在意大利和西西里，那里看到的声色享乐使他惊骇不安。他还记载了对狄昂的良好的印象。

公元前387年，柏拉图在雅典城的东北角创办了一所好多方面颇象现代私立大学的学园（Academy）[1]。柏拉图学园有教室、花园、饭厅、礼堂和学员宿舍，并有由柏拉图及其助手讲授的正式课程。仿效毕达哥拉斯学校的惯例，学员们吃公共伙食。学园同时也作为一个敬奉缪斯的宗教社团，以确保得到合法的承认。柏拉图自任校长，大概就住在学园的附近。

公元前367年春狄俄尼索去世，柏拉图的崇拜者狄昂成为首席大臣，他吁请柏拉图去叙拉古，以帮助教育他的外甥狄俄尼索二世，将他培养成一个能胜任他的职责的立宪君主。柏拉图应邀于公元前366年到达叙拉古。根据柏拉图的第七封信札，他到了那里发觉形势很复杂，一些叙拉古人认为，狄昂企图让他的外甥泡在没完没了的学习之中，以便他自己掌握实权。在柏拉图到达三个月之后，国王狄俄尼索二世怀疑起他的舅父来了，并以勾结敌国迦太基的罪名，将狄昂放逐到国外。柏拉图于次年(公元前365年)，在得到狄昂将被召回的诺言之后返回雅典。

公元前362年，柏拉图又应国王的邀请再次去叙拉古。据说

1）*Ακαδημεια*，原为纪念希腊英雄阿卡得穆的一处园林。

这一次国王真正对哲学感兴趣了，按照柏拉图的第七封信札的说法，这次他同意去那里，是被狄昂的事有可能在他返回叙拉古的条件下得以解决的前景所促成的。狄昂在被放逐的那几年里一直在雅典度过，并成为柏拉图的侄儿斯标西波的朋友。然而，柏拉图的调解努力以失败告终。国王非但没有听从柏拉图的劝说，反而禁止狄昂的代理人向狄昂解送他的地产收人，柏拉图也被软禁起来，好不容易才于公元前 361 年逃回雅典。于是，狄昂采取步骤以实现武力返回叙拉古，并要以非礼罪惩处国王。虽然这次他恳求柏拉图的帮助，但被柏拉图以年老为由婉谢了。学园中的其他一些成员参加了这次远征。狄昂的冒险行动得到成功，国王被赶下台，并逃走了。然而在短期执政之后，狄昂被参加这次远征的一个雅典人谋杀了(公元前 354 年)。柏拉图的第七和第八封信札，就是在这时期写给狄昂的同党的。

除去上面说的第二和第三次西西里之行，柏拉图自创办学园之后的四十年，一直在雅典度过。他从事学园的管理、教学、研究和写作。除去一些早期作品外，他的大部分著作都是在雅典完成的。柏拉图逝世于公元前 347 年，享年八十。传说他是在参加一位朋友的结婚宴会时，忽感不适，退到屋子一角平静地辞世的。

作为一位哲学家，柏拉图对于欧洲的哲学乃至整个文化的发展，有着深远的影响。特别是他的认识论、数学哲学和数学教育思想，在古代希腊的社会条件下，对于科学的形成和数学的发展，起了不可磨灭的推进作用。古希腊最大的科学家和思想家亚里士多德，曾师事柏拉图 20 年，被柏拉图誉为“学园的精英”；杰出的数学家欧多克索斯(Eudoxus)、门奈赫莫斯 (Menaechmus) 和泰特托斯 (Theaetetus) 等都是柏拉图的学生或同事，这决不是偶然的。

先说著作。除书札外，柏拉图的著作概用对话体裁。传世的有 35 篇《对话》和 13 封书札.《对话》中大多以苏格拉底为主角，常假托他的话来阐述柏拉图自己的哲学思想，行文优美，融哲学和文学为一体。关于这些著作的真伪和写作的先后，学者们的意见历

来不太一致。比较公认的说法是大约 20 多篇对话出自柏拉图之手。其中经常为人们引用的名篇，按写作先后可大致排列为：《申辩 (Apology)》，《克里托 (Crito)》，《普罗塔戈拉 (Protagoras)》，《高尔吉亚 (Gorgias)》，《克拉底鲁 (Cratylus)》，《美诺 (Meno)》，《菲多 (Phaedo)》，《会饮 (Symposium)》，《理想国 (Republic)》，《菲德罗 (Phaedrus)》，《巴门尼德 (Parmenides)》，《泰特托斯 (Theaetetus)》，《智者 (Sophist)》，《政治家 (Statesman)》，《菲利布 (Philebus)》，《蒂迈欧 (Timaeus)》，《克里底亚 (Critias)》，《法律 (Laws)》等。其中《理想国》著于壮年，如日中天，包罗万方，堪称千古名作。在 13 封书札中，一般认为第六、七、八封是可信的。

柏拉图的认识论，通常被认为是客观唯心主义的。在哲学史上，是他试图论述诸如什么是知识、知识的来源、感觉与知识、理性与知识等基本问题的。因此，只有柏拉图才能称得上是认识论的真正创始人。柏拉图认识论的主要部分是理念论、回忆说、辩证法和灵魂转向说。

关于柏拉图构想理念论的原因，亚里士多德作过清楚的分析。柏拉图年轻时就和雅典人克拉底鲁相识。克拉底鲁信奉赫拉克利特 (Heraclitus) 的学说，认为凡可目睹的事物永远处于变化的状态，因而关于它们没有知识可言。柏拉图当时和以后都没有否认这一点，因此，为了继承和发展苏格拉底在道德领域内对永久不变的共相的探求，柏拉图把共相和可以感知的具体事物分离开来，使之成为独立的实在，并称之为理念 (idea 或 form)。在他看来，具体事物是由于“分有”理念而得以存在的；当我们命名或说起这些具体事物时，我们所指的其实是同名理念。他把理念看做是可感事物的源泉，是正本；而把具体事物看做是模仿理念而成，是副本。他还设想在永恒不变的理念世界里，“善”理念具有太阳般崇高的位置，善是知识和真理的根源。并认为理念可以通过理性而不能通过感觉来认识。其实柏拉图的理念就是共相，是事物的本质属性。强调把事物的共相作为认识的起点，强调理性知识和感觉印

象的区别，具有积极的一面。但是柏拉图在处理精神世界和现实世界的关系时，犯了本末倒置的错误。他的得意门生亚里士多德在《形而上学》里，对此提出了批评和纠正。亚里士多德完全否定在现实世界之外还有一个独立自存的理念世界，认为理念实际上就是共性，它只能寓于个性之中，存在于人们的抽象概念中。列宁指出："亚里士多德对柏拉图的'理念'的批判，是对唯心主义，即一般唯心主义的批判。"[1]在哲学史上，黑格尔曾从哲学的辩证发展的角度，不无过誉地高度评价了师徒二人的贡献。他说："哲学之作为科学是从柏拉图开始而由亚里士多德完成的。他们比起所有别的哲学家来，应该可以叫做人类的导师。"

按照柏拉图的神话般的设想，理念是不死的灵魂所固有的。但在转世出生时遗忘掉了，只有后天通过感觉和学习，通过别人的询问，才能回忆起先天固有的知识。听到别人讲的道理而能理解，并非接受了别人的知识，乃是自己原有的知识经别人的提醒得以回忆起来。这就是他在《美诺》篇中提出的回忆说。因此，他主张教育应注重诱导和启发，应通过问答式的对话引导对方进行由近及远的层层推理。在《美诺》篇中，苏格拉底就是这样从一个未受过教育的男仆嘴里，引导出一道几何题的答案。这种采用对话来推求真理的方法，即所谓"理智助产术"，有时也被他称为"辩证法"。不过当他使用"辩证法"这一术语时，含义要更加广泛些，更着重于理念的推演和对立意见的辩析，更着重于对所谓"纯粹思想"的考察。黑格尔说："柏拉图的研究完全集中在纯粹思想里，对纯粹思想本身的考察他就叫辩证法。他的许多对话都包含这样意义的辩证法。这些纯粹思想是：'有'与'非有'、'一'与'多'、'无限'与'有限'。这些就是他独立地予以考察的对象，——因此这乃是一种纯逻辑的、最深奥的研究"。柏拉图在他的后期对话《巴门尼德》、《智者》和《非利布》等篇中阐述了他的辩证法。特别是《巴门尼德》篇，被黑格尔誉为"柏拉图辩证法最著名的杰作"。这篇对话的主题是

1) 《列宁全集》第 38 卷，人民出版社，1960; p. 313.

假借巴门尼德和芝诺之口说出来的辩证法。但应注意，希腊哲学家芝诺和柏拉图所说的辩证法，与马克思主义所讲的辩证法是有实质性的区别的。

柏拉图在他的对话中多处提到知识和意见(有时称为信念)之间的区别。他认为知识必须建立在理性的基础上，必须是真实的。而处于意见状态，则是指依据权威或仅仅出于习惯就接受的关于事实和原则的判断。由于没有把握事物之间的因果联系，意见可真可假。如果把握了事物之间的因果联系，就能用因果锁链把它们缚住，人们的认识也就由意见转变成知识。按照理念论，掌握知识的人通晓理念，并能将特殊情形和理念联系起来(虽然柏拉图未能成功地解释这种联系是怎样发生的)；而仅满足于持有意见的人，却只能在半真实的特殊事物间徘徊。

柏拉图在《理想国》第 VI，VII 两章中，通过三个有名的比喻："日喻"、"线喻"和"洞喻"，在对认识过程进行深入分析的基础上，提出并阐释了他的"灵魂转向说"。所谓"日喻"，简言之，就是把理念世界中的善理念比作可感世界中的太阳。太阳是光的源泉，是万物生长和可感性的原因，并引发眼睛的视觉功能；而善理念是真理的源泉，是真实存在(理念)的可知性的原因，并引发灵魂的认识功能。至于"线喻"，是通过将一条直线划分为四段作为比喻以分析认识过程的。他将这四个部分比喻为四种等级的心理状态：最高等级是理性，第二等级是理智，第三等级是信念，第四等级是想象。这四种心理状态是根据认识的真实性与明确性来划分的，前二者是对可知世界认识的结果，后二者是对可感世界认识的结果。这四个等级其实代表着认识过程由初级到高级的四个阶段，只是柏拉图从理念论的唯心观点出发，把前后次序倒置了。第四等级想象，代表感性认识的初级阶段。处于对可感事物外表的模糊觉察。例如，对物体投在水中的影象留下的第二手印象。第三等级信念，代表对现象界的比较明确的感性认识。例如，对于自然界和日常生活中一般事物的印象或意见。第二等级理智，其对象是理念世界中的一些孤立的理念。常常要借助于图形等的帮助，根据

某些假设进行逻辑推理。例如，从事数学研究时的心理状态就处于理智等级。第一等级理性，其对象是理念世界或所谓真实存在。凭借辩证法和纯粹思维，由理念到理念，直至达到终极真理。这就是以善理念为终极目标的纯哲学研究。而“洞喻”，是以在一个洞穴内面壁而居的囚徒走向光明的过程作比喻，形象地说明了从感性认识上升到理性认识的艰难历程。

然后，柏拉图十分自然地通过苏格拉底之口说：“每一个人在他的灵魂内部都隐藏着一种进行学习的能力，这种能力可比喻为知识之目。但正如必须转动整个身体，眼睛才能由黑暗转向光明一样，作为整体的灵魂也必须转移方向，知识之目才能离开变化的现象世界而朝向实在世界，并逐渐学会承受实在之光，直至看到最明亮、最美好的实在，换句话说，即看到善”。这就是柏拉图的“灵魂转向说”。他认为教育就是一种使灵魂转向的艺术，要研究用什么方式可使这种转向最易行、最有效。教育的目的不在于移植视力，因为灵魂本身已经有视力，而在于促使灵魂转移方向，转向该看的方向，让视力发挥作用。“转向说”不提知识是灵魂所固有的，而换成学习能力是灵魂所固有的。因此教育不是简单地唤起回忆，而是要采取确当的方式，引导灵魂转向，让学习能力向着正确的方向发展。虽然柏拉图没有宣布放弃“回忆说”，但是从《美诺》篇中的“回忆说”到《理想国》中的“转向说”，不能不说是他的认识论发展中的一大进步。

我们从柏拉图的著作中，可以看到数学哲学领域的最初的探究。柏拉图的数学哲学思想是同他的认识论、特别是理念论分不开的。他认为数学所研究的应是可知的理念世界中的永恒不变的关系，而不是可感的物质世界中的变动无常的关系。因此，数学的研究对象应是抽象的数和理想的图形。他在《理想国》中说，“我所说的意思是算术有很伟大和很高尚的作用，它迫使灵魂就抽象的数进行推理，而反对在论证中引入可见的和可提摸的对象。”他在另一处谈到几何时说：“你岂不知道，他们虽然利用各种可见的图形，并借此进行推理，但是他们实际思考的并不是这些图形，而是

类似于这些图形的理想形象．…，他们力求看到的是那些只有用心灵之目才能看到的实在．”

如果说数学概念的抽象化定义始于毕达哥拉斯学派，那么，柏拉图及其学派则把这一具有历史意义的工作大大地向前推进了．他们不仅把数学概念和现实中相应的实体区分开来，而且把它和在讨论中用以代表它们的几何图形严格地区分开来．柏拉图是从理念论的角度去探讨数学概念的涵义的．在柏拉图的第七封信札里，他曾以圆为例进行分析．他说，“有四种圆：(1)被世人称为圆的某种东西；(2)圆的定义：在任何方向上的边界点到中心的距离都是相等的；(3)画出的一个圆，即旋转圆规所得出的圆；(4)实质性的圆，即圆的理念，它与其它圆的存在密切相关，但又不同于任何其它的圆．”柏拉图接着评论道：(1)名称是无关紧要的，它只是由习惯形成的．我们甚至可称圆为直线，并反过来称直线为圆；(2)定义其实也不具有真正的确定性，它是由名词、动词等词语组成的；(3)是画出来或旋转出来的具体的圆，这里难免掺杂其它东西：它甚至充满着和圆的本质相抵触的成分．例如，虽然数学圆和数学直线仅能相切于一个公共点，但这在画图时是无法做到的．因此，(1)，(2)，(3)都不是完善的圆，许多具体的数学圆其实介于这些不完善的圆与唯一的圆的理念之间．亚里士多德阐释说，柏拉图是将数学对象置于现实对象与理念之间的，数学对象因其常驻不变而区别于现实对象，又因其可能有许多同类对象而区别于理念．举例说，三角形的理念只有唯一的一个，但存在许多数学三角形，也存在相应于这些数学三角形的各种不完善的摹本，即具有各种三角形形状的现实物体．

尽管柏拉图的数学理念带有唯心主义色彩，但从客观效果来看，这一词语的内涵和我们今天所说的数学概念的内涵是基本一致的．名称、定义和相应的图形都是用以描摹数学概念的，但是它们之中的任何一个都和数学概念自身有所区别．显然，定义要比名称和图形更能刻划一个数学概念的本质特征．事实上，柏拉图对数学定义极其重视．例如对偶数、图形、直线等定义，在其著

作中都作过推敲。在某些方面，他继承了毕达哥拉斯学派的传统，但也常常提出自己的异议，并在他的学园内进行讨论。例如在谈到点的定义时，柏拉图对于毕达哥拉斯的“具有位置的单子（monad）”这一定义明确地表示反对。事实上，“单子”并不比“点”更容易理解。虽经反复研究，但柏拉图也没有想出更好的定义来代替它。据亚里士多德说，柏拉图认为把点作为一类事物纯属“几何虚构”，他称点是“线段之端”，有时也用“不可分之线段”这一术语来表示同一意义。亚里士多德指出，即使不可分的线段也必然还有开端，因而这样解释于事无补；而把点定义为“线段之端”，则是不科学的。我们从这一段讨论中可以看出，柏拉图学派已接近于把点判为不可定义的原始概念了。

柏拉图在《理想国》第六卷中论及数学假设和证明。他说：“想必你知道，研究几何、算术以及这一类学问的人，首先要假定奇数、偶数、三种类型的角以及各学科中诸如此类的东西是已知的。这就是他们的假设，他们设想这些东西是任何人都知道的，因而认为无必要就此向他们自己或别人作任何说明。他们就从这些假设出发，并以前后一致的方式向下推，直至最后得出他们的结论。”这段话表明，从一些公认的假设出发进行演绎证明，这在当时的学园里已经是不争的事实，而且得到柏拉图的赞许。事实上，柏拉图十分强调脱离直观印象的纯理性证明，并严格地把数学作图工具限制为直尺和圆规。据普鲁塔克（Plutarch）的记述，当听说欧多克索斯和阿尔希塔斯应用机械工具来解决一个与立方倍积问题有关的几何作图时，柏拉图就愤愤地予以抨击。认为这样做“只能导致几何学的堕落，剥夺它的优点，因而使它可耻地背弃纯理智的抽象对象，倒退到感性，并求助于物质。”柏拉图的这种或许有点过激的主张，对于形成欧几里得几何的公理演绎体系，不无促进作用。但其副作用也是不可否认的：由于古希腊的实验科学和机械学受到哲学家的漠视，以致长期处于相对落后的状态。柏拉图也十分重视算术，但他是将算术和实用计算区分开来的。他所说的“算术”其实是指关于整数的学问。

希腊数学评论家普罗克拉斯（Proclus）和历史学家 D. 拉尔修（Laertius，公元 3 世纪），把两类方法论归功于柏拉图. 第一类是分析法，第二类是归谬法或间接法. 关于第一类方法，T. L. 希思（Heath）认为普罗克拉斯所指是柏拉图在《理想国》中使用的那种哲学方法，被误解为数学中的分析法. 但是很可能为了强调逻辑严格性，柏拉图曾指出在分析法证明之后有加以综合的必要. 至于归谬法，有人认为应归功于希波克拉底（Hippocrates）. 关于这两种方法的发明权问题，至今尚无定论.

柏拉图在相当大的程度上继承了毕达哥拉斯学派的“万物皆数”的观点. 他认为宇宙间的天体以至万事万物都是按照数学规律来设计的. 依赖感官所感觉到的世界是混乱和迷离的，因而是不可靠的和无价值的. 只有通过数学才能领悟到世界的实质. 他因此逐渐对数学产生了强烈的兴趣. 他对几何学如此崇拜，以至认为创造世界的神是一个“伟大的几何学家”. 他甚至具体设想宇宙之初有两种直角三角形，一种是正方形的一半，另一种是等边三角形的一半. 由这些三角形组成四种正多面体，构成四种元素的微粒. 其中火微粒是正四面体，土微粒是正立方体，气微粒是正八面体，水微粒是正二十面体. 至于各面为正五边形的正十二面体，则是构成天上物质的精英. 后来，他特地对五种正多面体的特征和作图方法作了系统的论述，因而后人就把这五种正多面体统称为柏拉图体. 他认为宇宙是活的，是运动的，而且是做的圆周运动，因为圆是完善的. 他还认为万物都可以用一个数目来定名，这个数目体现其所含元素的比例，等等. 这一切可以说明，柏拉图的宇宙观是数学化的宇宙观. 这种宇宙观是形成柏拉图的数学教育观的思想基础. 现代英国著名数学家 B. 罗素（Russell）评论说：“在认为没有数学就不可能有真正的智慧这一点上，他是一个十足的毕达哥拉斯主义者。”

自公元前 387 年开始，柏拉图就把创建和主持学园教育作为自己最重要的事业. 虽然他认为学园的办学宗旨是培养具有哲学头脑的优秀政治人才，直至造就一个能够胜任治国重任的哲学王，

但在具体课程设计上却继承和发展了毕达哥拉斯学派的以数学为主课的方针．在《理想国》第七卷中，他系统地论述了学园的教育方针．他批评了雅典人过早地以“辩论术”培训年轻人的传统做法，认为那样做“结果是损坏了自己和整个哲学事业在世人心目中的信誉”．他主张对 20 岁到 30 岁的学员进行长达十年的以数学为中心的教育．课程包括算术、平面几何、立体几何，天文学和谐音学．其中天文学不依赖对天象的观察，而主要凭借纯粹的数和图形来研究天体运动；谐音学不是凭借经验，而主要依据数本身的性质，去思考哪些数是和谐的，哪些数是不和谐的．因此，按照毕达哥拉斯学校的惯例，这两门课也被看成是数学学科．这些课程都是为学习辩证法作准备的．待 30 岁以后，花五年时间专心学习以辩证法为主的哲学，35 岁以后方才出任公职．不过在上述五门课程中，主要是算术和平面几何，因为其它三门学科在当时发展得还很不成熟．柏拉图曾谈到立体几何没有得到发展的具体原因，并倡导人们对它进行研究．此外，他还讨论了关于选定哪些人去研习这些功课的问题．回答是要象选择统治者那样，“必须挑选出最坚定、最勇敢、在可能范围内也最有风度的人．此外，我们还得要求他们不仅性格高贵严肃而且还要具有适合这类教育的天赋．”接着还讨论了应有哪些天赋的问题．由此可见，柏拉图学园里实施的是一种英才教育．据 F. 拉瑟尔说，在柏拉图以及他的继任人斯标西波主持学园的共约 46 年期间，数学一直在学园内占据主导地位，柏拉图的数学大纲得到充分的贯彻．从公元 6 世纪以来广为流传的一则故事说，在柏拉图学院的大门口刻有“不懂几何者不得入内”的铭文．如果确有其事的话，这恐怕是有史以来从知识方面规定入学条件的最早记录．

柏拉图为什么如此重视数学教育呢？这主要是根据他的教育目标和他的认识论学说确定的．柏拉图的教育目标是通过长期的严格训练，培养出一批精通辩证法、能凭借理性去把握永恒不变的实在（理念）、直至能把握善理念的人才．只有这样的人才有资格统治国家，只有把握了善理念的哲学家才能以善理念为模型和蓝

图，来塑造人间的理想国.要实现这一目标，从认识论的角度看，其关键是要实现由第三等级信念状态到第一等级理性状态的转向.而从事数学思考的认识能力，正好处于信念和理性之间的理智状态，因此，对学员进行长期的数学教育，就成为完成这一极其重要的心灵转向的必要措施了.他在《理想国》第七卷中说："对于那些将来要在城邦肩负重任的人们，尤其要力劝他们学习算术，且不可象常人那样浅尝即止，而必须潜心研习，直到能从纯理性上洞察数的本质.因为对他们来说，学习算术的目的不是象商贩那样为了去做买卖，而是为了它在军事上的应用，为了灵魂本身去学的，因为这是使灵魂由变化的现象世界转向真理和实在的捷径."他接着讨论了几何，指出几何学"能帮助人们较为容易地把握善理念".并以肯定的语气说："因此，我的好朋友，几何学将把灵魂引向真理，将缔造哲学精神，使灵魂转向上升，而不是象现今那样可悲地转向下降."由以上一些引语可知，柏拉图确实是把学园里的数学教育作为引导灵魂转向，培养哲学家和统治者的必经途径的.

柏拉图倡导多层次的数学教育.其最高层次就是在学园中推行的为培养"英才"服务的那种数学教育.第二层次是培养为"理想国"服务的各类知识分子.即所谓"要用算术来训练那些天赋聪颖的人，务必不要疏忽了这门学问."这里的教育对象只须天赋聪颖，不必具备为选择统治者所制订的条件.第三层次是提高庶民的文化知识水平.即所谓"天性迟钝的人，倘能接受算术训练，即使无其它方面的益处，至少也可变得比以前伶俐些."这种多层次的数学教育，在某种意义上也体现了一种因材施教的原则.柏拉图接着提出了全体居民学数学的建议："应该严格规定贵城邦的全体居民务必学习几何.…，经验证明，学过几何的人在学习其它任何学问时，要比未学过几何的人快得多."柏拉图在这里首次提出了普及数学教育的主张，并且点出了数学教育对于提高智力的功用.柏拉图还热心于教学方法的改进.他说，不应只向人们简单地灌输一堆知识，而应当让他们学会通过表面现象看到事物的深处，看到永恒的实在，看到藏在万物后面的"善".为了启迪思维，柏拉图

善于应用"理智助产术"，通过问答式对话，引导学生的思路向深层发展。他还鼓励学生提出一些问题来让大家进行讨论。这些教学方法即使在今天也还有一定的借鉴意义。

在柏拉图的指导下，学园的数学教育取得极大的成功。在公元前4世纪的希腊，绝大多数知名数学家都是柏拉图的学生或朋友。他们之间经常进行讨论或交流，而柏拉图学园则成为开展数学交流活动的中心场所。他们以柏拉图为核心形成一个学派，史称柏拉图学派。其中泰特托斯(约公元前415—前369年)是雅典人，在学园早期就是柏拉图的亲密助手。在他死后不久，柏拉图写了一篇以他命名的对话《泰特托斯》用以纪念他。泰特托斯对于数学的主要贡献有二。其一是继德俄多儒证明了$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$，…，$\sqrt{17}$的无理性之后，泰特托斯进一步研究了一般的二次以及更高次的不尽根数，并讨论了一些有关性质。欧几里得《几何原本》第十卷中的某些定理据信出自他的成果。其二是在已知的三种正多面体的构造方法之外，加上自己发现的正八面体和正二十面体的构造方法，并且证明了在五种正多面体之外不可能有其它正多面体。欧多克索斯是尼多斯人，他年轻时就慕名去雅典学园聆听柏拉图的演讲。后来又带着自己的一些学生来雅典，并很可能一起加入了柏拉图学园。他对数学的最大贡献是创立了关于比例的一个新理论，从而克服了不可公度量的发现给几何学带来的危机。《几何原本》第五卷"比例论"主要采自欧多克索斯的工作。其次是建立了严谨的穷竭法，并用它证明了一些求积定理。虽然穷竭法起源于安蒂丰（Antiphon），但只有到了欧多克索斯，穷竭法才真正成为一种合格的几何方法。此外他对天文学亦有重要贡献。门奈赫莫斯是欧多克索斯的学生，也是柏拉图学园中的一员。他最大的功绩是发现了圆锥曲线。他也研究过立方倍积问题，得到两种几何解法。很可能由此得到启发，导致圆锥曲线的发现。还有一些知名数学家也是属于柏拉图学派的，但关于他们的工作已无从查考。后来的大数学家欧几里得（Euclid）早年也曾在柏拉图学园里攻读过几何学。事实上，他的《几何原本》中的大部分内容都是来

源于柏拉图学派数学家的研究成果。美国数学史家 C. B. 波耶(Boyer)评论说:“虽然柏拉图本人在数学研究方面没有特别杰出的学术成果,然而,他却是那个时代的数学活动的核心,…,他对数学的满腔热忱没有使他成为知名数学家,但却赢得了‘数学家的缔造者’的美称”。

关于柏拉图对数学之外的科学发展的影响,褒贬不一。H. 尤斯纳(Usener)曾于 1884 年断言学园是已知的第一个科学研究机关。由此引起的争议迄今尚无定论。持反对态度的人将学园和现代的政治学院或法学院作比较,后者的方向完全是实用的。他们认为,柏拉图的本意并非进行百科全书式的科学教育,也不是为了促进科学的全面发展,学园也不是让一切科学都得以研究的场所;它只是出于智力训练的目的才选教一些学科,并作一些基础研究的,以便为哲学和制订法律服务。虽然在《蒂迈欧》篇中提供了柏拉图本人对于医学和生理学表现出浓厚的兴趣的证据,在《政治家》篇中表现了对制造工艺的关注,在《克里底亚》篇中提出了关于雅典地质的奇妙的纲要,在《法律》篇中表现了对欧多克索斯的天体学说的支持,等等。这些足以说明柏拉图对自然科学的广博知识和强烈爱好,但似乎还不足以证实学园已经成为一个科学研究机构的说法.这些争论恐怕难得有统一的时候,但人们似乎会同意当代著名数学家 A. 怀特海(Whitehead)的名言:“在柏拉图的宇宙设想的背后,始终闪耀着一个强烈的信念,即数学知识终将被证明是解开天地间种种联系的奥秘的钥匙。”

文　　献

[1] B. Jowett, The dialogues of Plato, 5 vols, Oxford, 第三版 1892; 重印, 1931.

[2] H. Hamilton and H. Cairns, The collected dialogues of Plato, including the letters, Princeton, 第七次印刷 1973.

[3] L. A. Post, Thirteen epistles of Plato, Oxford, 1925.

[4] F. M. Cornford, The republic of Plato, Oxford, 1947.

[5] 柏拉图, 理想国,吴献书译,商务印书馆,第一版 1929; 重印, 1957.

[6] 柏拉图, 理想国,郭斌和、张竹明译,商务印书馆,第一版 1986.

[7] D. J. Allan, Plato, 见 Dictionary of scientific biography. vol XI, pp. 22—31.
[8] A. E. Taylor, Plato: the man and his work, London, 第二版 1927.
[9] C. J. Rowe, Plato, the Harvester Press, 1984.
[10] D. Laertius, Lives of eminent philosophers, the Loeb Classical Library. 1925.
[11] F. M. Cornford, Plato's theory of knowledge: the 〈Theatetus〉 and 〈Sophist〉 of Plato, Indianapolis, 1957.
[12] F. Lasserre, The birth of mathematics in the age of Plato, London, 1964.
[13] R. S. Brumbaugh, Plato's mathematical imagination: the mathematical passages in the Dialogues and their interpretation, Bloomington, 1954.
[14] 范明生,柏拉图哲学述评,上海人民出版社, 1984.
[15] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, vol. 1, Oxford, 第一版 1921; 重印, 1981.
[16] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, New York, 1972 (中译本: M. 克莱因,古今数学思想(第一分册),张理京等译,上海科学技术出版社, 1979).
[17] W. F. Hegel, Vorlesungen über die geschichte der philosophie(中译本: 黑格尔,哲学史讲演录,商务印书馆,新一版 1960; 重印, 1981, 第二卷).
[18] B. Russell, A history of western philosophy, London, 1955(中译本: B. 罗素,西方哲学史(上、下卷),商务印书馆, 1981).
[19] D. W. Hamlyn, History of epistemology,(中译本: 西方认识论简史, 中国人民大学出版社, 1987).
[20] C. B. Boyer, A history of Mathematics, John Wiley and Sons, 1968.
[21] S. F. Mason, A history of the science, 1962 (中译本: S. F. 梅森,自然科学史,上海译文出版社, 1980)

欧多克索斯

周焕山
（江苏教育学院）

欧多克索斯（Eudoxus）约公元前400年生于尼多斯（Cnidus，今土耳其西南部）；约公元前347年卒于尼多斯．数学、天文学、地理学．

欧多克索斯出生于一个世代行医的家庭，年轻时就读于著名的尼多斯医科学校．卒业后，当过医生赛奥梅顿（Theomedon）的助手．可能在这个时期曾去过意大利和西西里，向阿尔希塔斯（Archytas）学习几何．公元前368年，他随同赛奥梅顿去雅典作为期两个月的访问．赛奥梅顿在皮雷埃夫斯（Piraeus）为他安排了住所，但是求知渴望驱使他每天步行十多公里，往返于皮雷埃夫斯和雅典之间，去"学园"聆听柏拉图等大师们的演讲．他深受激励，增强了研究数学、天文学和哲学的志趣，并和柏拉图本人建立了友谊．返回尼多斯之后，他一边行医，一边研究学问．约公元前365年，他同另一位医生克里西帕斯（Chrysippus）去埃及访问．这一次，他受斯巴达国王的委托向埃及法老递交一封表示亲善的外交书信．他因此得以晋谒法老，并由此得以结交赫里俄波里斯（Heliopolis，太阳神庙所在地）的一些高僧．由于东道国的好客和朋友的资助，他在埃及旅居了约十五个月之久．他在那里观测了希腊人看不到的南天星座，以及尼罗河的起落．他虚心地向僧侣们学习天文历算知识，仔细研究埃及历法，并考察了当地的风土民俗和神话传说，但他表示不相信占星、算命可以预知人的一生命运．

当埃及返回小亚细亚以后，欧多克索斯在基齐库斯 (Cyzicus, 今马尔马拉海南岸) 创办了一所学校. 他在那里培养了许多学生，声誉日隆，还应邀访问了卡里亚 (Caria) 的君主马索洛斯 (Mausolus). 他的第一本著作《现象》(Phaenomena) 就是在基齐库斯发表的.

在公元前 360 年到前 350 年之间，欧多克索斯曾带领一些学生迁往雅典，和柏拉图学园建立了更为密切的联系，他们很可能加入了柏拉图学园. 后来尼多斯发生重大的政治变革，人民推翻了独裁政权，建立了民主政体. 欧多克索斯应邀回归故国，为尼多斯人起草了必要的法典，并获得极高的荣誉. 此后他在尼多斯定居下来，继续从事教学和科学研究，并坚持天文观测，直至逝世.

欧多克索斯是古希腊时代成就卓著的数学家和天文学家. 他对数学的最大的功绩是创立了关于比例的一个新理论. 根据亚里士多德 (Aristoteles) 著作中的有关记述和后来评注家对欧几里得 (Euclid)《几何原本》(Elements) 的分析，可以断定《几何原本》卷 V 和卷 XII 主要来自欧多克索斯的工作. 毕达哥拉斯 (Pythagoras) 学派也建立过比例论，但只适用于可公度量. 设 A, B 两个量可公度，A 是公度的 m 倍，B 是公度的 n 倍，那么 $A:B=m:n$ 是一个数. 这时，A, B 叫做"可比的". 如果两个比 $A:B$ 与 $C:D$ 相等，就构成了比例式 $A:B=C:D$. 最初他们认为所有的量都是可公度的，因此任何两个量都可比. 但后来发现有些量是不可公度的. 比例论的建立就发生了困难. 彻底摆脱这一困难的是欧多克索斯. 可惜他的著作已失传，他的贡献只能从别人的工作中去了解.

他首先引入"量"的概念，将"量"和"数"区别开来. 用现代的术语来说，他的"量"指的是"连续量"，如长度、面积、重量等，而"数"是"离散的"，仅限于有理数. 其次改变"比"的定义："比"是同类量之间的大小关系. 如果一个量加大若干倍之后就可以大于另一个量，则说这两个量有一个"比". 如果承认了"阿基米德公

理"(这个公理其实亚里士多德已经提到，后又为欧多克索斯及欧几里得所用，不过在现存文献中正式作为公理形式提出的，则以阿基米德为最早)，那么任何两个同类量都有"比"。

根据现代的比例论，如果 A, B, C, D 四个量成比例：$A/B = C/D$，两边分别乘以分数 m/n，得到 $(mA)/(nB) = (mC)/(nD)$.

由 $mA > nB$，立即可以推出 $mC > nD$；

由 $mA = nB$，立即可以推出 $mC = nD$；

由 $mA < nB$，立即可以推出 $mC < nD$.

欧多克索斯比例论的关键，是将这一性质作为比例的定义，即

设有 A，B，C，D 四个量，将 A 与 C，B 与 D 分别乘以相同的倍数，如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB\text{，可以推出 } mC \gtreqless nD\text{，}$$

就说两个比 $A:B$ 与 $C:D$ 相等，四个量可构成比例式 $A:B = C:D$。

从这一定义出发，可以推出有关比例的若干命题，而不必考虑这些量是否可公度。这在希腊数学史上是一个大突破.不难看出，当两个量 a 和 b 不可公度时，可按 $m/n < a/b$ 或 $m/n > a/b$，把全体有理数划分成两个不相交的集合 L 和 U，使得 L 的每一元素都小于 U 的每一元素，并以此定义无理数 a/b。这令人想起了"戴德金分割"。事实上，19 世纪的无理数理论是欧多克索斯思想的继承和发展.不过欧多克索斯理论是建筑在几何量的基础之上的，因而回避了把无理数作为数来处理.尽管如此，欧多克索斯的这些定义无疑给不可公度比提供了逻辑基础。为了防止在处理这些量时出错，他进一步建立了以明确公理为依据的演绎体系，从而大大推进了几何学的发展。从他之后，几何学成了希腊数学的主流。

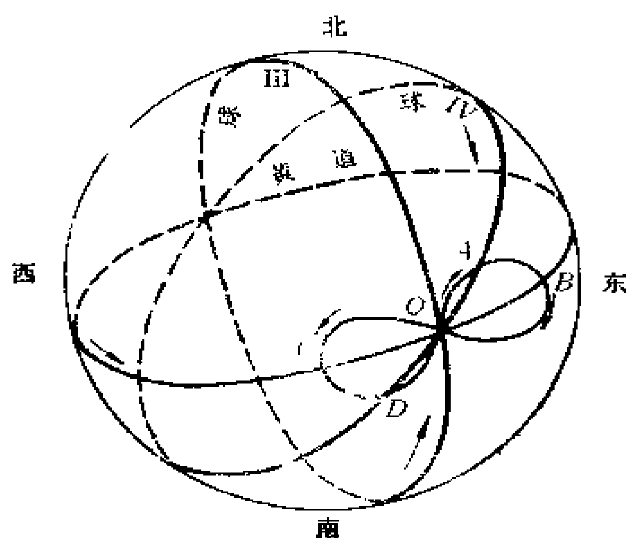
欧多克索斯对数学的第二个贡献是建立了严谨的穷竭法，库

用它证明了一些重要的求积定理。穷竭法起源于安蒂丰（Antiphon），后来希波克拉底（Hippocrates）也使用过，但只是到了欧多克索斯手里，穷竭法才真正成为一种合格的几何方法。穷竭法的逻辑依据，是欧多克索斯由上述定义4推得的下述结果："设给定两个不相等的量，如果从其中较大的量减去比它的一半大的量，再从所余的量减去比这余量的一半大的量，继续重复这一过程，必有某个余量将小于给定的较小的量"。这个结果，现在被称为欧多克索斯原理。阿基米德曾明确地指出，"棱锥体积是同底同高的棱柱体积的三分之一"和"圆锥体积是同底同高的圆柱体积的三分之一"这两个定理是欧多克索斯首先予以证明的。不过前一个结论曾先由德谟克利特（Democritus）未加证明地提出过。欧多克索斯的穷竭法可看做是微积分的第一步，但没有明确地用极限概念，也回避了"无穷小"概念。

此外，欧多克索斯还研究过"中末比"（后人称黄金分割）和"倍立方"等著名的数学问题。根据欧德莫斯（Eudemus）在《几何学史》中的记载，他在研究中末比时应用了分析法。他在这方面的工作痕迹，可用《几何原本》卷 XIII 命题5来说明。命题5是一个关于中末比的定理。一些古代手稿表明，命题5原先是根据比例的一般性质用分析法予以证明的。这一证法很可能出自欧多克索斯之手。他在解倍立方问题时，象阿尔希塔斯一样，曾应用机械来解几何问题，为此遭到主张把作图工具严格限制为直尺和圆规的柏拉图的批评．埃拉托斯特尼（Eratosthenes）曾经在一本书中引述过欧多克索斯的解法，可惜的是这段记述失传了．

欧多克索斯在天文学方面最有影响的工作，在于把球面几何用于天文研究，提出一个以地球为中心的同心球理论。这种理论起源于早期的毕达哥拉斯学派，而为柏拉图所继承。按照柏拉图的说法，整个宇宙以及其中的一切天体都是球形的，因为球形是一切形状中最完美的。位于宇宙中心的是地球，宇宙的轴通过地球中心，一切都按从东向西的方向绕轴作匀速圆周运动。然而事实上，行星的运动速度时快时慢，时而静止，甚至逆行。对此，柏拉图

认为这只是一种表面现象，可以用匀速圆周运动的结合来解释。他在《蒂迈欧》（Timaeus）篇中说，太阳、月亮和五颗行星除了每日象恒星一样从东向西运转一周以外，它们同时还在和天球赤道平面成一倾角的另一平面内做独立的圆周运动，这两种运动的合成，就使行星在空间的路线被扭曲成螺旋形了。欧多克索斯发展了柏拉图的观点，在《论速度》（On speeds）一书中提出了自己的同心球理论。他认为所有恒星共处于半径最大的一个球面上，此球每日环绕通过地心的轴线自东向西旋转一周。其他天体的运动，则由多个同心球的匀速转动结合而成。太阳、月亮各三个，五颗行星各四个，连同恒星的一个，共计 27 个同心球。这 27 个球经过适当组合以后，就可解释人们观测到的天象。例如，金星的运动由这样四个同心球确定：第一个球作类似恒星的运动，每日一周；第二个球沿黄道十二宫运行，方向和第一球相反，每年一周。第三、四两个球用以说明金星速度的变化。它们的周期都等于金星和太阳的会合周期，即 570 天，但运动的方向彼此相反。它们的旋转轴和黄道圈的轴所成角度，系根据观测数据来推算。如果暂不考虑第一、二两球，仅考虑第三、四两球运动的合成，就形成一种球面双纽线（如图所示），形如古代的"马镣"，故欧多克索斯称它为"马镣线"。如果结合第二个球沿黄道的运行，则在图上 D 与 A 之间，金星将沿



黄道运行，在O点的速度达最大值，随后减速，在AB段近于停滞，B点处速度为0。从B到C，金星发生逆行，O点处逆速度最大，C点处速度为0。CD段近于停滞，并逐渐恢复向东运行。再加上第一个球的昼夜运行，四个同心球的结合，就对金星的视运动作出了一种比较接近的解释。当然，同心球理论纯粹是一种几何模型，由于它建立在地心说的错误假设上，因而无法与实际天象真正吻合。不久就有批评指出，行星亮度的变化说明它到地球的距离也是变化的。但是，欧多克索斯工作的真正意义在于理论方面，他的同心球模型是建立数学化的天文理论的第一次尝试，也是显示了天才的独创性的一次尝试。

欧多克索斯在天文学上的另一项引人注目的工作，是对星象的长期不懈的观测，并在《现象》一书中记述了他的观测结果。书中不仅象地图一样描述了主要星座的空中位置，而且记载了一些星座在地平线起、落的情况，为改革历法准备了必要的资料。欧多克索斯后来曾对此书作过全面修订，并以《镜象》为名重新发表。在此基础上，他编制了一本新型的天文历书，即所谓《八年轮迴历》(Oktaeteris)。这本历书及其后的一些仿效本，在希腊人居住地域得到广泛流传。公元前46年，罗马凯撒（Caesar）大帝颁布的儒略历，又把欧多克索斯的历法思想传遍欧洲。影响所及，直至现代。

欧多克索斯还精确地测算了行星运行的周期。下面是他对行星的黄道周期和会合周期的测算结果同现代结果的对比表：

	黄道周期		会合周期	
	欧氏结果	现代结果	欧氏结果	现代结果
土星	30 年	29 年+166 天	390 天	378 天
木星	12 年	11 年+315 天	390 天	399 天
火星	2 年	1 年+322 天	260 天	780 天
水星	1 年	1 年	110 天	116 天
金星	1 年	1 年	570 天	584 天

可见，除去火星的会合周期因某种原因有明显差错之外，其余数据都和现代结果相当接近。这在当时很原始的观测条件下是难能可贵的。这类观测结果也为他设计同心球几何模型准备了所需要的数据。

欧多克索斯写过一部七卷的《地球巡礼》，总结了他在地理学方面的考察研究结果。根据现存的约一百件残片，可以推知原著的概貌。欧多克索斯从遥远的亚洲说起，系统地记叙了当时希腊人所能知道的世界的每个部分。并加上政治、历史、人种等方面的详情介绍，还利用希腊神话进行渲染。书中第二卷写埃及，第四卷写包括色雷斯（Thrace）在内的爱琴海沿岸地区，第六卷写希腊半岛及北非，第七卷写意大利，包括一篇关于毕达哥拉斯学派的习俗的附记。文笔生动，堪与米利都的地理学家赫卡泰乌斯（Hecataeus，公元前 6—5 世纪）的杰作《环游世界》（Ges periodos）相媲美。

瑞士希腊史家 F. 拉瑟尔（Lasserre）称欧多克索斯是"和柏拉图同时代的最杰出的数学家，他由于对三门学科：几何学、天文学和地理学的贡献而闻名于世"。他一生的著述很多，除以上三门外，还涉及医学、法律、哲学等多个领域，可惜都没有流传下来。

文　献

[1] F. Lasserre, Die fragmente des Eudoxus von Knidos, Berlin. 1966.

[2] F. Lasserre, The birth of mathematics in the age of Plato. Hutchinson of London, 1964.

[3] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, vol. I, Oxford, 1921；重印 1981.

[4] T. L. Heath, Mathematics in Aristotle, Oxford. 1949.

[5] O. Neugebauer. The exact sciences in antiquity, 第二版, Providence. 1957.

[6] G. L. Huxley, Eudoxus of Cnidus, 见 Dictionary of scientific biography, vol. IV, pp. 465—467.

[7] M. Kline Mathematical thought from ancient to modern times, New York. 1972（中译本：M. 克莱因，古今数学思想，第一册，上海科学技术出版社，1979）.

[8] C. H. Edwards, The historical development of the calculus, Springer 1979（中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987）.

门奈赫莫斯

梁 宗 巨

（辽 宁 师 范 大 学）

门奈赫莫斯（Menaechmus） 公元前4世纪中活跃于雅典和基齐库斯（Cyzicus）．数学．

门奈赫莫斯以发现圆锥曲线著称．他曾撰写柏拉图《共和国》（Republic）的注释和其他哲学著作，大概还对自己发现的圆锥曲线写过专书，可惜均已失传．关于他的生平及工作，流传下来的片断收集在 Max C. P. 施密特（Schmidt）的文章中（[1]）．G. J. 奥尔曼（Allman）对他作了较详细的描述（[2]）．

普罗克洛斯在《概要》（Proclus's summary）中有一段记述："阿米克拉斯（Amyclas of Heraclea）是柏拉图的朋友，欧多克索斯的学生门奈赫莫斯也和柏拉图交往，还有他的兄弟狄诺斯特拉托斯（Dinostratus），他们使几何学更臻完善"．

多数学者认为（例如［6］，p. 59；［2］，p. 153）休达斯（Suidas）[1]《词典》所提到的门奈赫莫斯（Manaechmus）是同一个人，姓名有一个字母的相差可能是误写．休达斯记述他是柏拉图学派的哲学家，写过哲学和三卷关于柏拉图《共和国》的书，活动于普罗康尼萨斯（Proconnesus，马尔马拉海中的岛）一带．这里和基齐库斯（位于马尔马拉海南岸的半岛上，今属土耳其）靠近，它当时也是希腊的学术中心，天文学家卡利普斯（Callippus）就在那里进行研究．

1）约 10 世纪晚期君士坦丁堡的希腊词典编纂者．

斯托比亚斯 (Stobaeus,约公元500年)记载一则轶事[1]:"亚历山大王(Alexander the Great, 公元前 356—前 323 年)要求门奈赫莫斯用更简单的办法教他学习几何学,他回答道: '在国家里有老百姓走的小路,也有为国王铺设的大道,但在几何里, 道路只有一条!'"另一种说法认为这是欧几里得和托勒密王的故事.[2] 不管怎样,门奈赫莫斯当过亚历山大王的教师是可信的,这大概是由亚里士多德的引荐. 亚历山大 13 岁时就拜亚里士多德为师,学习荷马史诗、伦理学、哲学、植物学、动物学、地理学等, 但不包括数学. 以后推荐一位数学教师,是合情合理的.

门奈赫莫斯的两大业绩,一是发现圆锥曲线,二是用圆锥曲线解倍立方问题,而前者也是由倍立方问题引起的.

倍立方就是要作一个立方体,使其体积是已知立方体的两倍. 困难之处是作图工具只允许用无刻度的直尺和圆规, 实际这是不可能的. 正因为不可能, 往往使人自觉不自觉闯进未知的领域里去,作出新的发现. 圆锥曲线就是一个典型的例子.

倍立方问题如不限于尺规,历史上有各种解法,较详细地记载在欧托基奥斯(Eutocius of Ascalon[3] 约生于公元 480 年)[4] 对阿基米德《论球与圆柱》(On the sphere and cylinder)的注释中. ([7], [8], I, pp. 257—309.) 其中提到希波克拉底 (Hippocrates of Chios) 最先认识到它可以归结为求线段 a 与 b 之间的两个等比中项[5]. 设 x, y 是这两个中项, 即 $a:x = x:y = y:b$, 于是 $x^2 = ay$, $xy = ab$, 两式相乘, $x^3 = a^2b$, 当 $b = 2a$ 时, $x^3 = 2a^3$. 若 a 是已知立方体的一边,则 x 就是所求立方体的一边.

埃拉托塞尼创设一种器械的解法,他用警句或短诗 (epigram) 的形式写出来,奉献给托勒密三世,刻在大理石板上, 还附有器械

---

1) 出自 C. Wachsmuth 校订的 Stobaeus, anthologium, Leipzig, 1884.

2) 参见本文集 p. 94

3) 阿什凯隆,今属巴勒斯坦地区.

4) 希腊数学著作的注释家.

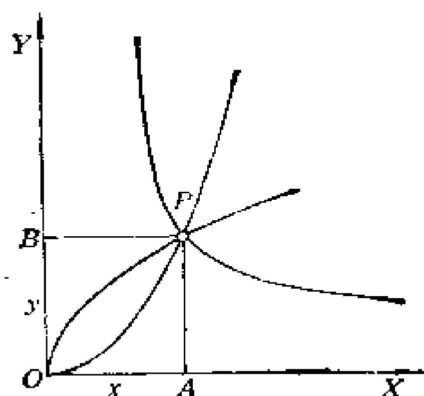
5) 普罗克洛斯在注释欧几里得《几何原本》卷 I 时也提到这件事. ([8], I, p. 253.)

的模型，能够求出任意两条线段的两个等比中项. 诗句中有一段话说明自己方法的特点：

试图不用阿尔希塔斯（Archytas）繁难的圆柱解法，也不用门奈赫莫斯截割圆锥所得的"三物组"(triads)，……

所谓"三物组"，就是用平面去截圆锥面所得到的三种圆锥曲线，可见门奈赫莫斯的发现已被人们公认. 普罗克洛斯也多次提到门奈赫莫斯发现圆锥曲线并解决求两个等比中项的问题.（[2]，pp. 155，158.）

J. É. 蒙蒂克拉（Montucla，1725—1799）是近代最早研究希腊数学史的学者. 在他的《数学史》中（[9]，I，pp. 175—178），特别指出门奈赫莫斯发现了圆锥曲线并解决倍立方问题，在他之前，没有任何圆锥曲线研究的迹象，而经他的手，开辟了一个奇葩盛开的数学园地.



根据欧托基奥斯的记载，门奈赫莫斯用两种方法去解倍立方问题.（[7]，[8]，I，pp. 278—283，[4]，I，pp. 253—255.）下面改用现代的术语和符号来叙述.

第一法：给定两线段 a，b，求作这两线段的两个等比中项 x，y.

分析. 设 x，y 已作出，即 $a:x=x:y=y:b$. 由此得

$$x^2=ay \tag{1}$$

$$y^2=bx \tag{2}$$

$$xy=ab \tag{3}$$

作 $OX\perp OY$，在 OX 上取 $OA=x$，在 OY 上取 $OB=y$，完成矩形 $OAPB$. (1) 式是以 O 为顶点，以 OY 为轴，a 为正焦弦的抛物线，因 x，y 满足 (1) 式，故 P 必落在此抛物线上. 而 (3) 式是以 OX，OY 为渐近线的等轴双曲线，x，y 也满足 (3) 式，

故同时落在此双曲线上. 于是得出作图的方法.

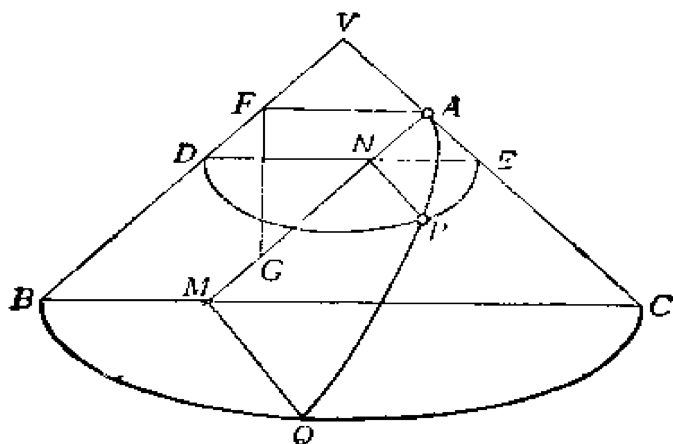
作图. 作 $OY \perp OX$, 以 OY 为轴, O 为顶点, a 为正焦弦 (latus rectum) 作抛物线. 又以 OX, OY 为渐近线作等轴双曲线,使过其上的点 P, 且平行于 OX, OY 的线段 BP, AP (即 P 点的横坐标、纵坐标) 所包的矩形 (即 $BP \cdot AP$) 等于 a, b 所包的矩形 (即 $a \cdot b$). 设抛物线与双曲线交于 P, 过 P 作平行于 OX, OY 的直线交 OX, OY 于 A, B, 则 $OA = x$, $OB = y$ 就是所求的两个等中项.

第二法: 注意到 (2) 式也是一条抛物线,它以 OX 为轴, O 为顶点, b 为正焦弦. 以 x, y 为坐标的 P 点也落在此抛物线上. 于是得出作图方法: 作 $OY \perp OX$, 以 O 为顶点, 各以 OX, OY 为轴, a, b 为正焦弦,作两条抛物线, 其交点 P 的坐标 x, y 就是所求的等比中项.

门奈赫莫斯时代,并没有抛物线、双曲线、纵坐标 (ordinate) 等名称,这是后来阿波罗尼奥斯创用的.欧托基奥斯阐述上述方法时已在公元 500 年以后,他使用了阿波罗尼奥斯的术语. 有些地方仍沿用古希腊的传统说法. 例如将 "两线段的乘积"说成"两线段所含(或包围)的矩形"等.用现代解析几何的眼光去看(1),(2),(3) 式所表示的曲线是一目了然的. 但在欧几里得之前, 几何学刚处于萌芽状态,要辨认出这一类特殊曲线, 并指出其基本性质,确是难能可贵的.

有一个问题是历史学家感兴趣的, 就是门奈赫莫斯怎样会想到用截取圆锥面的办法来获得这类曲线?

根据盖米诺斯 (Geminus, 约公元前 70 年)的记载,以后为普罗克洛斯所引用,古代数学家是用旋转直角三角形(围绕一个直角边)来产生圆锥面的,这个不动的直角边叫做轴,斜边叫做母线.通过轴的平面与圆锥面相交所成的三角形叫做轴三角形. 轴三角形的顶角是直角的圆锥叫做"直角圆锥", 顶角是钝角(锐角)时叫做"钝角(锐角)圆锥".门奈赫莫斯用垂直于一条母线的平面去截圆锥面, 得到三种截线. 最早对此作出解释的是 C. A. 布雷特施奈德



(Bretschneider)([3]),以后各家的解释大同小异。略述如下:

设VBC是直角圆锥面的轴三角形,V为直角.现用平面AMQ去截圆锥面,此平面垂直于母线VC,当然也垂直于VBC平面[1],与圆锥面的交线APQ(另一半未画出)称为"直角圆锥截线"(section of the right-angled cone)(即抛物线).截平面与轴三角形交于AM。设P是截线上任一点,过P作平面垂直于轴,与圆锥面的交线是平行于底BQC的圆DPE,直径是DE。平面DPE,AMQ均垂直于VBC,故其交线NP垂直VBC,从而$NP\perp DE$,于是

$$NP^2 = DN \cdot NE.$$

过A作$AF /\!/ DE$,过F作$FG\perp DE$,交AM于G,$\triangle AFG\backsim\triangle EAN$,$FA:AG = AN:NE$,即$FA\cdot NE = AG\cdot AN$.又$DN = FA$,故有

$$NP^2 = FA\cdot NE$$
$$= AG\cdot AN.$$

记$NP = y$,$AN = x$,AG是常数,记作b,上式可写成

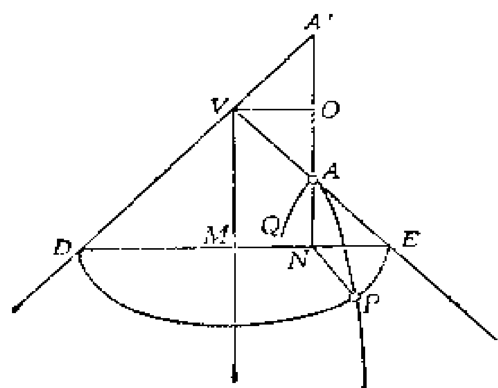
$$y^2 = bx.$$

用解析几何的说法,曲线上任一点的纵标的平方等于横标乘上一常数(正焦弦)。这正是抛物线的基本性质。

---

1) 一平面过另一平面的垂线,则此二平面垂直.现平面VBC通过截平面AMQ的垂线VC.

如果轴三角形的顶角 V 是钝角，仍然用垂直于母线的平面去截，则可以得到双曲线，当然未必是等轴双曲线。若适当选择截平面的位置，也可以得到等轴双曲线。不过希思认为门奈赫莫斯可能用更简单的办法去取得.([4]，II，p. 115.)例如，仍用直角圆锥，VDE 是轴三角形，用平行于轴 VM 的平面 QAP 去截圆锥面，截线是 QAP。在其上任取一点 P，过 P 作平面垂直于轴 VM，与圆锥面的交线是以 DE 为直径的圆 DPE。QAP 平面与 DPE 平面均垂直于 VDE 平面，故交线 NP 垂直于 VDE 平面，从而 $NP\perp DE$。于是有



$$
\begin{aligned}
NP^2 &= DN\cdot NE\\
&=(DM+MN)(ME-MN),
\end{aligned}
$$

而 $DM=ME=MV=ON$，$MN=VO=OA$，故

$$
\begin{aligned}
NP^2 &= (ON+OA)(ON-OA)\\
&= ON^2-OA^2. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

设 $NP=y$，$ON=x$，$OA=a$，上式化为

$$x^2-y^2=a^2.$$

这正是等轴双曲线的基本性质，x，y 是点的坐标。

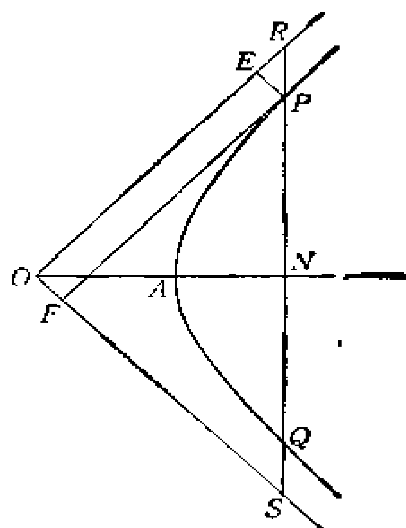
根据欧托基奥斯的记述，及现代数学史家(例如 H. G. 塞乌滕(Zeuthen)，见[10])的研究，一般认为门奈赫莫斯已发现双曲线渐近线的性质[1]，并且是直接由等轴双曲线推得的.大致思路如下：

在等轴双曲线 PAQ 上任取一点 P，过 P 作轴 ON 的垂线交渐近线于 S，R，又过 P 作渐近线的垂线 PE，PF。在直角 $\triangle REP$ 中，$PR^2=2PE^2$，或 $\frac{PR}{PE}=\frac{2PE}{PR}$，又 $\triangle REP\backsim\triangle PFS$，

1) 也有的学者对此表示怀疑，例如奥尔曼([2]，p. 170).

$$\frac{SP}{PF}=\frac{PR}{PE}=\frac{2PE}{PR}$$，即

$$SP \cdot PR = 2PE \cdot PF. \tag{5}$$



根据等轴双曲线的基本性质(4)，又由(5)式，$OA^2 = a^2 = ON^2 - NP^2 = NR^2 - NP^2 = (NR + NP) \cdot (NR - NP) = SP \cdot PR = 2PE \cdot PF$。$PE$，$PF$ 是 P 至渐近线的距离，二者之积为常数。P 沿曲线移动，PF 越大，PE 越小。([4]，II，p. 116。)

解倍立方问题只用到抛物线和双曲线，实际上在日常生活中，椭圆更为常见。圆的投影，圆柱、圆锥的截线等都是。大概门奈赫莫斯用垂直于母线的平面去截直角及钝角圆锥面，得到抛物线与双曲线之后，自然会想到去截锐角圆锥面，于是又得到椭圆。布雷特施奈德对此也作了推导。([2]，p. 168。)

总的来说，门奈赫莫斯是圆锥曲线的发现者，他用垂直于母线的平面去截直角、钝角、锐角圆锥面，得到三种曲线。不久就有阿里斯泰奥斯（Aristaeus）作了较深入的探讨，并写出专著，欧几里得、阿基米德等人又进一步加以研究，最后由阿波罗尼奥斯集其大成。

文　　献

[1] Max C. P. Schmidt, Die Fragmente des Mathematikers Menaechmus, in Philologus. 42(1884), pp. 77—81.

[2] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Arno Press, 1976, pp. 153—179.

[3] C. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides, Leipzig, 1870, pp. 155—163.

[4] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press,

1921.
[5] J. L. Coolidge, A history of the conic sections and quadric surfaces, Oxford, 1945.
[6] Theonis Smyrnaei Platonici, Liber de Astronomia, Th. H. Martin 校订，Paris, 1849.
[7] Eutocius, Commentarii in libros De sphaera et cylindro, in Archimedis opera omnia, J. L. Heiberg 校订，Leipzig, 1915.
[8] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, 1957.
[9] J. É. Montucla, Histoire des mathématiques, Nouvelle édition, Chez Henri Agasse, Paris, 1799—1802.
[10] H. G. Zeuthen, Keglesnitslaeren i Oldtiden, Copenhagen, 1885, R. von Fischer-Benzon 德译校订，Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Copenhagen, 1886.

欧　几　里　得

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

欧几里得（Euclid，拉丁文为 Euclides 或 Euclei-des）公元前300年前后活跃于古希腊文化中心亚历山大。数学。

欧几里得以其所著的《几何原本》（Elements，以下简称《原本》）闻名于世，他的名字在20世纪以前一直是几何学的同义词，而对于他的生平，现在知道的却很少。他生活的年代，是根据下列的记载来确定的.雅典柏拉图学园晚期的导师普罗克洛斯（Proclus，约公元412—485年）在450年左右给欧几里得《原本》卷I作注，写了一个《几何学发展概要》，常称为《普罗克洛斯概要》（Proclus's summary），简称《概要》，是研究希腊几何学史的两大重要原始参考资料之一.另一种资料是帕波斯（Pappus）的《数学汇编》（Mathematical collections），下面简称《汇编》。《概要》中指出，欧几里得是托勒密一世（Ptolemy Soter，约公元前367—前282年，前323—前285年在位，托勒密王朝的建立者）时代的人，早年求学于雅典，深知柏拉图的学说。他著《原本》时引用许多柏拉图学派人物如欧多克索斯（Eudoxus）、泰特托斯（Theaetetus，约公元前417—前369年）的成果，可能他也是这个学派的成员.《概要》又说阿基米德（Archimedes）的书引用过《原本》的命题[1]，可见他早于阿

1）这是指阿基米德《论球与圆柱》（On the sphere and cylinder）卷I命题6中明确地指出引用了《原本》卷XII命题2的证明。见 E. J. Dijksterhuis, Archimedes, Ejnar Munksgaard, 1956, p.153. 1950年丹麦数学家 J. 耶勒姆斯莱夫（Hjelmslev，1873—1950）断言"引用欧几里得"这句话是后人添加上去的.但经过多方考察仍然可以肯定阿基米德认真参考了欧几里得《原本》.

基米德，也早于埃拉托塞尼（Eratosthenes）。

通过亚里士多德（Aristotle）的著作，也可以核对欧几里得的年代。《原本》中建立公设、公理，显然受到亚里士多德逻辑思想的影响。亚里士多德在《分析前篇》（Prior analytics）中给出“等腰三角形两底角相等”的“证明”，和《原本》卷I命题5完全不同，也没有提到欧几里得[1]。可见《原本》的证明是欧几里得后来完成的，他的活动年代应在亚里士多德之后。

另一方面，欧几里得的天文著作《现象》（Phaenomena）曾引用奥托利科斯（Autolycus of Pitane，约公元前300年）《运行的天体》（On moving sphere）的命题。而奥托利科斯是阿塞西劳斯（Arcesilaus，约公元前315—前241年，曾是柏拉图学园的导师）的老师。

此外，帕波斯在《汇编》（卷7）中提到阿波罗尼奥斯（Apollonius）长期住在亚历山大，和欧几里得的学生在一起。这说明欧几里得在亚历山大教过学。

综上所述，欧几里得活跃时期应该是公元前300—前295年前后。

《概要》还记述了这样一则轶事：托勒密王问欧几里得，除了他的《原本》之外，有没有其他学习几何的捷径。欧几里得回答道：“几何无王者之道”（μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν）意思是在几何学里，没有专门为国王铺设的大路（见[6]，p.155）。这句话后来推广为“求知无坦途”，成为传诵千古的箴言。斯托比亚斯（Stobaeus，约公元500年）[2]的记载略有差异，他认为是门奈赫莫斯（Menaechmus）对亚历山大王说的话：“在国家里有老百姓走的小路，也有为国王铺设的大道，但在几何里，道路只有一条！”（见[12]，p.92.）现多数学者取前说。理由是在门奈赫莫斯的时代，几何学尚未形成严整的独立学科。

斯托比亚斯还记载另一则故事，说一个学生才开始学习第一

1）见 T. Heath, Mathematics in Aristotle, Oxford Press, 1949, p.23.

2）选集的编者，编过500多个希腊作家的选集。

个命题，就问学了几何学之后将得到些什么。欧几里得说："给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利"。（见［13］，p.152.）由此可知欧几里得主张学习必须循序渐进、刻苦钻研，不赞成投机取巧的作风，也反对狭隘实用观点。帕波斯特别赞赏欧几里得的谦逊，他从不掠人之美，也没有声称过哪些是自己的独创。而阿波罗尼奥斯则不然，他过分突出自己，明明是欧几里得研究过的工作，他在《圆锥曲线论》中也没有提到欧几里得。（见［7］，p.203.）

除《原本》之外，欧几里得还有不少著作，可惜大都失传。几何著作保存下来的有《已知数》（The data）、《图形的分割》（On divisions of figures），此外还有光学、天文学和力学等，多已散失。

《原本》产生的历史背景

欧几里得《原本》是一部划时代的著作。其伟大的历史意义在于它是用公理方法建立起演绎体系的最早典范。过去所积累下来的数学知识，是零碎的、片断的，可以比作木石、砖瓦。只有借助于逻辑方法，把这些知识组织起来，加以分类、比较，揭露彼此间的内在联系，整理在一个严密的系统之中，才能建成巍峨的大厦.《原本》完成了这一艰巨的任务，对整个数学的发展产生了深远的影响。

《原本》的出现不是偶然的，在它之前，已有许多希腊学者做了大量的前驱工作。从泰勒斯算起，已有300多年的历史（见［11］）。泰勒斯是希腊第一个哲学学派——伊奥尼亚学派的创建者。他力图摆脱宗教，从自然现象中去寻找真理，对一切科学问题不仅回答"怎么样"？还要回答"为什么这样"？他对数学的最大贡献是开始了命题的证明，为建立几何的演绎体系迈出了可贵的第一步。

接着是毕达哥拉斯学派，用数来解释一切，将数学从具体的事物中抽象出来，建立自己的理论体系。他们发现了勾股定理，不可通约量，并知道五种正多面体的存在，这些后来都成为《原本》的重要内容。这个学派的另一特点是将算术和几何紧密联系起来，为

《原本》算术的几何化提供了线索.

希波战争[1]以后，雅典成为人文荟萃的中心. 雅典的智人(sophist) 学派提出几何作图的三大问题：(1) 三等分任意角；(2) 倍立方——求作一立方体，使其体积等于已知立方体的两倍；(3) 化圆为方——求作一正方形，使其面积等于一已知圆. 问题的难处，是作图只许用直尺(没有刻度，只能划直线的尺)和圆规. 希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上去解决这些问题. 这是几何学从实际应用向演绎体系靠拢的又一步. 作图只能用尺规的限制最先是伊诺皮迪斯 (Oenopedes, 约公元前 465 年)提出的，后来《原本》用公设的形式规定下来[2]，于是成为希腊几何的金科玉律.

智人学派的安蒂丰 (Antiphon) 为了解决化圆为方问题，提出颇有价值的"穷竭法" (method of exhaustion)，孕育着近代极限论的思想. 后来经过欧多克索斯的改进，使其严格化，成为《原本》中的重要证明方法，较有代表性的是卷 XII 的命题 2.（见 [2], vol 3, p. 365; [9], p. 230.）

埃利亚(意大利半岛南端)学派的芝诺 (Zeno of Elea) 提出四个著名的悖论，迫使哲学家和数学家深入思考无穷的问题. 无穷历来是争论的焦点，在《原本》中，欧几里得实际上是回避了这一矛盾. 例如卷IX命题 20 说："素数的个数比任意给定的素数都多"[3]，而不用我们现在更简单的说法：素数无穷多. 只说直线可任意延长而不是无限延长.

原子论学派的德谟克利特 (Democritus, 约公元前 410 年)用原子法得到的结论：锥体体积是同底等高柱体的 1/3，后来也是《原本》中的重要命题.

---

1) 希腊各城邦反抗波斯侵略的战争，从公元前 500 年到前 449 年，以波斯失败而告终.

2) 《原本》卷 I 给出 5 个公设，头三个就是对作图的规定：(1) 从任一点到另一点可作一直线；(2) 线段可任意延长；(3) 以任意中心，任意半径可作一圆. 根据这几条公设，作图只需也只可用直尺圆规.

3) 李善兰、伟烈亚力中译本的译文是：任置若干数根(素数)，数根必不尽于此.

柏拉图学派的思想对欧几里得无疑产生过深刻的影响。柏拉图非常重视数学，特别强调数学在训练智力方面的作用，而忽视其实用价值。他主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。

这个学派的重要人物欧多克索斯创立了比例论，用公理法建立理论，使得比例也适用于不可通约量。《原本》卷V比例论大部分采自欧多克索斯的工作。

柏拉图的门徒亚里士多德是形式逻辑的奠基者，他的逻辑思想为日后将几何整理在严密的体系之中创造了必要的条件。

到公元前4世纪，希腊几何学已经积累了大量的知识，逻辑理论也渐臻成熟，由来已久的公理化思想更是大势所趋。这时，形成一个严整的几何结构已是"山雨欲来风满楼"了。

建筑师没有创造木石砖瓦，但利用现有的材料来建成大厦也是一项不平凡的创造。公理的选择，定义的给出，内容的编排，方法的运用以及命题的严格证明都需要有高度的智慧并要付出巨大的劳动。从事这宏伟工程的并不是个别的学者，在欧几里得之前已有好几个数学家做过这种综合整理工作。其中有希波克拉底（Hippocrates, 约公元前460年），勒俄（Leo 或 Leon, 公元前4世纪），修迪奥斯（Theudius, 公元前4世纪）等。但经得起历史风霜考验的，只有欧几里得《原本》一种。在漫长的岁月里，它历尽沧桑而能流传千古，表明它有顽强的生命力。它的公理化思想和方法，将继续照耀着数学前进的道路。

《原本》的版本和流传

欧几里得本人的《原本》手稿早已失传，现在看到的各种版本都是根据后人的修订本、注释本、翻译本重新整理出来的。古希腊的海伦（Heron）、波菲里奥斯（Porphyrius, 约公元232—304年）、帕波斯，辛普利休斯（Simplicius, 6世纪前半叶）等人都注释过。

最重要的是赛翁(Theon of Alexandria, 约公元 390 年)的修订本，对原文作了校勘和补充，这个本子是后来所有流行的希腊文本及译本的基础.赛翁虽生活在亚历山大,但离开欧几里得已有 7 个世纪,他究竟作了多少补充和修改,在 19 世纪以前是不清楚的.

19 世纪初,拿破仑称雄欧洲,1808 年他在梵蒂冈图书馆找到一些希腊文的手稿，带回巴黎去. 其中有两种欧几里得著作的手抄本,以后为 F. 佩拉尔 (Peyrard, 1760—1822) 所得. (见[2], pp. 46—47, p.103.) 1814—1818 年,佩拉尔将两种书用希腊文、拉丁文、法文三种文字出版,一种就是《原本》,另一种是《已知数》,通常叫做梵蒂冈本.《原本》的梵蒂冈本和过去的版本不同，过去的版本都声称来自赛翁的版本,而且包含卷 VI 命题 33 (在等圆中,无论是圆心角或圆周角，两角之比等于所对弧之比). 赛翁在注释托勒密 (Ptolemy) 的书时自称他在注《原本》时曾扩充了这个命题并加以证明. 而梵蒂冈本没有上述这些内容，可见是赛翁之前的本子,当更接近欧几里得原著. (见 [7], p.207.)

9 世纪以后，大量的希腊著作被译成阿拉伯文.《原本》的阿拉伯文译本主要有三种: (1) 赫贾季 (al-Ḥajjāj ibn Yūsuf, 9 世纪)译; (2) 伊沙格 (Isḥāq ibn Ḥunain, ?—910) 译,后来为塔比伊本库拉 (Thābit ibn Qurra, 约 826—901) 所修订,一般称为伊沙格-塔比本; (3) 纳西尔丁 (Naṣīr ad-Dīn al Tūsī, 1201—1274) 译.

现存最早的拉丁文本是 1120 年左右由阿德拉德 (Adelard of Bath. 1120 左右)从阿拉伯文译过来的. 后来杰拉德 (Gerard of Cremona. 约 1114—1187) 又从伊沙格-塔比本译出. 1255 年左右,坎帕努斯 (Campanus of Novara, ?—1296) 参考数种阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新将《原本》译成拉丁文. 两百多年之后 (1482) 以印刷本的形式在威尼斯出版,这是西方最早印刷的数学书. 在这之后到 19 世纪末,《原本》的印刷本用各种文字出了一千版以上. 从来没有一本科学书籍象《原本》那样长期成为广大学子传诵的读物. 它流传之广,影响之大,仅次于基督教的《圣经》.

15 世纪以后，学者们的注意力转向希腊文本，B. 赞贝蒂(Zamberti, 约生于 1473) 第一次直接从赛翁的希腊文本译成拉丁文，1505 年在威尼斯出版。

目前权威的版本是 J. L. 海伯格(Heiberg, 1854—1928, 丹麦人)、H. 门格 (Menge) 校订注释的 "Euclidis opera omnia" (《欧几里得全集》, 1883—1916 出版)，是希腊文与拉丁文对照本. 最早完整的英译本(1570)的译者是 H. 比林斯利 (Billingsley, ?—1606). 现在最流行的标准英译本是 T. L. 希思 (Heath, 1861—1940, 英国人) 译注的 "The thirteen books of Euclid's Elements (《欧几里得几何原本 13 卷》, 1908 初版，1925 再版，1956 修订版)，这书译自上述的海伯格本，附有一篇长达 150 多页的导言，实际是欧几里得研究的历史总结，又对每章每节都作了详细的注释. 对其他文字的版本，包括意、德、法、荷、英、西、瑞典、丹麦以及现代希腊等语种，此书导言均有所评论。

中国最早的汉译本是 1607 年(明万历 35 年丁未)意大利传教士利玛窦 (Matteo Ricci, 1552—1610) 和徐光启 (1562—1633) 合译出版的. 这是中国近代翻译西方数学书籍的开始，从此打开了中西学术交流的大门. 所根据的底本是德国人 C. 克拉维乌斯(Clavius, 1537—1612) 校订增补的拉丁文本 "Euclidis Elementorum Libri XV" (《欧几里得原本 15 卷》, 1574 初版，以后再版多次). 徐、利译本只译了前 6 卷，定名为《几何原本》，"几何"这个名称就是这样来的.

有的学者认为元代(13 世纪)《原本》已经传入中国，根据是元代王士点、商企翁《元秘书监志》卷 7 "回回书籍"条有《兀忽列的四擘算法段数十五部》的书目，其中兀忽列的应是 Euclid 的音译. (见 [15], p. 139; [16].)但也有可能仍是阿拉伯文本，只是译出书名而已[1]. 后说似更可信.

---

1) 李约瑟 (Joseph Needham) «中国科学技术史» (Science & civilisation in China 1959) 中译本第 3 卷 (1978), p. 235. 马坚«<元秘书监志>"回回书籍"释义», 载«光明日报» 1955 年 7 月 7 日.

克拉维乌斯本是增补本，和原著有很大出入．原著只有 13 卷，卷 XIV, XV 是后人添加上去的．卷 XIV 一般认为出自许普西克勒斯 (Hypsicles, 约公元前 180) 之手，而卷 XV 是 6 世纪初大马士革乌斯 (Damascius, 叙利亚人)所著．(见 [12], p.119, 182.)

利玛窦、徐光启共同译完前 6 卷之后，徐光启"意方锐，欲竟之"，利玛窦不同意，说："止，请先传此，使同志者习之，果以为用也，而后徐计其余．"[1]三年之后，利玛窦去世，留下校订的手稿．徐光启据此将前 6 卷旧稿再一次加以修改，重新刊刻传世．他对未能完成全部的翻译而感遗憾，在《题〈几何原本〉再校本》中感叹道："续成大业，未知何日，未知何人，书以俟焉．"

整整 250 年之后，到 1857 年，后 9 卷才由英国人伟烈亚力 (Alexander Wylie, 1815—1887) 和李善兰 (1811—1882) 共同译出．但所根据的底本已不是克拉维乌斯的拉丁文本而是另一种英文版本．伟烈亚力在序中只提到底本是从希腊文译成英文的本子，按照英译本的流传情况，可能性最大的是 I. 巴罗 (Barrow, 1630—1677, 牛顿的老师)的 15 卷英译本[2]，他在 1655 年将希腊文本译成拉丁文，1660 年又译成英文．

李、伟译本(通称"清译本") 至今已有 100 多年，现已不易看到，况且又是文言文，名词术语和现代有很大差异，这更增了研读的困难，因此重新翻译是十分必要的．[3]

徐、利前 6 卷的译本(通称"明译本")在"原本"之前加上"几何"二字，称译本为《几何原本》．清译本的后 9 卷沿用这个名称一直到现在．这"几何"二字是怎样来的？目前有三种说法：(1) 几何是拉丁文 geometria 字头 geo 的音译．此说颇为流行，源出于艾约瑟 (Joseph Edkins, 1825—1905, 英国人)的猜想，记在日本中村正直 (1832—1891) 为某书所写的序中[4]．(2) 在汉语里，"几何"原是多少、若干的意思，而《原本》实际包括了当时的全部数学，

1) 利玛窦《译〈几何原本〉引》．

2) 钱宝琮《中国数学史》，科学出版社，1964, p.324.

3) 新译本已于 1990 年由陕西科技出版社出版．

4) 林鹤一《和算研究录》下卷，东京开成馆，1937, p.403.

故几何是“mathematica”（数学)或“magnitude”（大小)的意译．(3)《原本》前6卷讲几何，卷VII—X是数论，但全用几何方式来叙述，其余各章也讲几何，所以基本上是一部几何书．内容和中国传统的算学很不相同．为了区别起见，应创新词来表达．几何二字既和“geometria”的字头音近，又反映了数量大小的关系，采用这两个字可以音、意兼顾．这也许更接近徐、利二氏的原意．

《原本》内容简介

明、清译本因为是修订增补本，和现行的希思英译本有相当大的出入，下面以希思本为主，兼顾明、清译本，作一简要的介绍．

卷I首先给出23个定义．如1.点是没有部分的(A point is that which has no part)；2.线只有长而没有宽(A line is breadthless length)，等等．还有平面、直角、垂直、锐角、钝角、平行线等定义．前7个定义实际上只是几何形象的直观描述，后面的推理完全没有用到．

明译本（即克拉维乌斯增补本）在原文的基础上加入很多说明，将23个定义拆成“界说三十六则”．一开头还对“界说”加以界说：“凡造论，先当分别解说论中所用名目，故曰界说．”下面指出几何研究的对象：“凡论几何，先从一点始，自点引之为线，线展为面，面积为体，是名三度．”可见在明译本中，几何(几何学)研究的是由点、线、面、体构成的图形，和数学研究的对象不同，两者有广狭之分．但在别的地方，几何就是“大小”、“多少”的意思，即通常所说的“量”，和“数”是有区别的．如卷V第2界：“若小几何能度大者，则大为小之几倍”，现可译为“当一个较大的量能被较小的量量尽时，较大的量叫做较小量的倍量（multiple)”．

定义之后，是5个公设，头3个是作图的规定，第4个是“凡直角都相等”．这几个都是显而易见的，没有引起什么争论，第5个就很复杂：“若一直线与两直线相交，所构成的同旁内角小于二直角，那么，把这两直线延长，一定在那两内角的一侧相交”．这就是

后来引起许多纠纷的"欧几里得平行公设"或简称第5公设。

公设后面，还有5条公理，如1.等于同量的量彼此相等；5.整体大于部分；等等。以后各卷不再列其他公理。在《原本》中，公设(postilute)主要是关于几何的基本规定，而公理(axiom)是关于量的基本规定。将两者分开是从亚里士多德开始的，[1]现代数学则一律称为公理。

由于平行公设不象其他公理那么简单明了，人们自然会怀疑，欧几里得把它列为公设，不是它不可能证明，而是没有找到证明。这实在是这部千古不朽巨著的白璧微瑕。从《原本》的产生到19世纪初，许多学者投人无穷无尽的精力，力图洗刷这唯一的"污点"，最后导致非欧几何的建立。

这一卷在公理之后给出48个命题。前4个是：

1. 在已知线段上作一等边三角形。

2. 以已知点为端点，作一线段与已知线段相等。

3. 已知大小二线段，求在大线段上截取一线段与小线段相等。

4. 两三角形两边与夹角对应相等，则这两三角形相等。

这里两三角形"相等"，指的是"全等"，但在这一卷命题35以后，相等又有另外的含义，它可以指面积相等。现在已把图形全等(congruent)与等积(equiareal或equivalent)区分开来，而在《原本》中是用同一个字眼(equal)来表示的(见[2],p. 327)。不过欧几里得从来没有把面积看作一个数来运算，面积相等是"拼补相等"。[2]

命题5颇有趣：等腰三角形两底角相等，两底角的外角也相

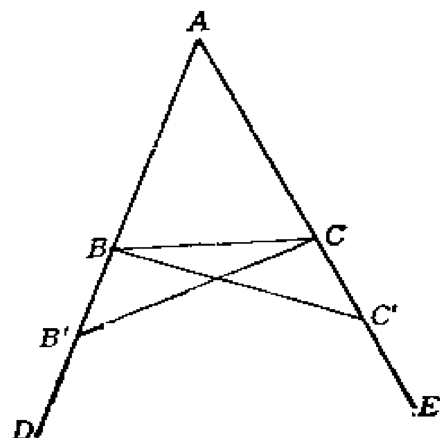
---

1) T. Heath, Mathematics in Aristotle, Oxford Press, 1949, p.52, 56,57.

2) 这是后来希尔伯特(D. Hilbert)在《几何基础》(Grundlagen der Geometrie, 1930)中使用的术语。他先定义"剖分相等"(zerlegungsgleich, divisibly-equal)：如果将图形A剖分成有限多块，可以拼凑成另一图形B，则说A与B剖分相等。进一步定义"拼补相等"(inhaltsgleich, equal in content)：设C与D剖分相等，A与C合并成A'，B与D合并成B'，如果A'与B'剖分相等，则说A与B拼补相等。见中译本，科学出版社，1958，p.104。

等.

现在通常是用引顶角平分线来证明的，但作角的平分线是命题 9，这里还不能用，只能用前 4 个命题以及公设、公理来证.



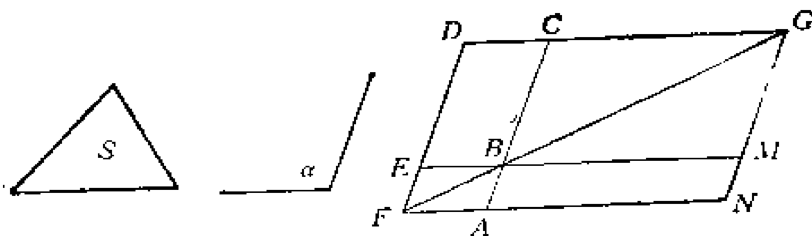
证法是延长 AB 至 D，AC 至 E [公设 2]，在 AD 上任取一点 B'，在 AE 上截取 $AC'=AB'$ [命题 3]，连接 $B'C$，BC' [公设 1]. 接着证 $\triangle AB'C\cong\triangle ABC'$ [命题 4]，故知 $B'C=BC'$，$\angle BB'C=\angle CC'B$，又 $BB'=CC'$，于是 $\triangle BB'C\cong\triangle BC'C$. 由此就不难推出命题的结论.

中世纪时，欧洲数学水平很低，学生初读《原本》，学到命题 5，觉得线和角很多，一时很难领会，因此这个命题被戏称为"驴桥"(pons asinorum, asses' bridge. 意思是"笨蛋的难关")[1]

后面的命题包括三角形、垂直、平行、直线形(面积)相等等关系.

命题 44：用已知线段为一边，作一个平行四边形，使它等于已知三角形，且有一个角等于已知角.

设 AB 是已知线段，S 是已知三角形，α 是已知角.



延长 AB，作 $\angle EBC=\alpha$，根据 43 命题，可作一个 $\square EBCD=$

1) "驴桥"还有另一种解释，认为证明时所画的图形像一座高架桥，只有脚步稳健的驴才过得去. 见[2]，vol. 1, p.415.

S. 过A作 $FA /\!/ EB$ 交 ED 的延长线于 F，连 FB 并延长之，交 DC 的延长线于 G(因$\angle EDC$ 与$\angle DEB$ 互补，但$\angle EFB < \angle DEB$，故$\angle EDC + \angle EFB$ 小于二直角，按平行公设，FB 与 DC 延线必相交)，过G作 GN 交 EB，FA 的延长线于 M，N. 因$\square AM = \square EC = S$，故$\square AM$ 即为所求。

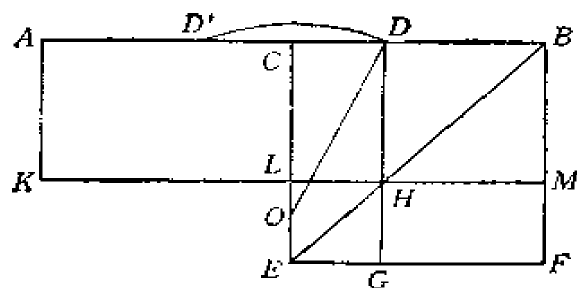
欧几里得的术语是"将平行四边形 AM 贴合到线段 AB 上去". 普罗克洛斯评注《原本》时指出，"面积的贴合"(application of areas) 是古希腊几何学的一种重要方法，它是毕达哥拉斯学派发现的。(见 [2], vol.1, p. 343.)

如果已知角 α 是直角，则所求的平行四边形是矩形，矩形另一边未知，设为 x。命题化为解一次方程 $ax = S$ 的问题，或用几何作图进行除法 $S \div a$ 运算的问题。

命题 47 就是有名的勾股定理："在直角三角形斜边上的正方形等于直角边上的两个正方形."这里相等仍然是指拼补相等，不牵涉到长度、数的关系。本卷最后一个命题(命题 48)是勾股定理的逆定理。

卷 II 包括 14 个命题，用几何的形式叙述代数的问题，即所谓"几何代数学"(geometrical algebra)。一个数(或量)用一条线段来表示，两数的积说成两条线段所构成的矩形，数的平方根说成等于这个数的正方形的一边。

命题 1：设有两线段，其中之一被截成若干部分，则此两线段所构成的矩形等于各个部分与未截线段所构成的矩形之和。



相当于恒等式

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$$

命题 4：将一线段任意分为两部分，在整个线段上的正方形等于在部分线段上的两个正方形加上这两部分线段所构成的矩形的二倍。 相当于 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

命题 5 是值得注意的，它相当于二次方程的解法．今用现代术语、符号解释如下：

设 C 是线段 AB 的中点，D 是另一任意点，则 AD 与 DB 所构成的矩形加上 CD 上的正方形等于 CB 上的正方形．

［证明］ 完成□$CEFB$，连对角线 EB，作 $DG /\!/ CE$ 交 EB 于 H，过 H 作 $KM /\!/ AB$，作 $AK \perp KM$．因 ▭AL = ▭CM，▭CH = ▭HF，$DB = HD$，故 AD 与 DB 所构成的矩形 = ▭AH = ▭AL + ▭CH = ▭CM + ▭HF，同加上 $CD(=LH)$ 上的正方形□LG，即得命题的结论．

1756 年，R. 西姆森 (Simson, 1687—1768)[1] 注释《原本》的英译本时指出，将本命题(记为 II5) 稍加改变，即相当于二次方程的解法．

已知线段 $AB = a$，求其上一点 D，使 AD 与 DB 所构成的矩形等于已知 □b^2 (以 b 为边的正方形)．设 $DB = x$，列成方程得 $(a-x)x = b^2$ 或 $x^2 - ax + b^2 = 0$．由 II 5，AD 与 DB 所构成的 ▭AH = □CF − □LG，利用勾股定理 (I 47)，作一个正方形等于二正方形的差是轻而易举的，现□CF，□b^2 已知，作两者之差即得 □LG，由此得 CD 及 x．具体的作法是：取 AB 中点 C，作 $CE \perp AB$，在 CE 上取 O 点，使 $OC = b$，以 O 为心，CB 为半径作弧交 AB 于 D，D'，则 D 就是所求的点，由于对称性，取 D' 也一样．和代数解法对照，$CB = \frac{a}{2}$，$CD^2 = OD^2 - OC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$，$x = DB$ (或 $D'B$) $= CB \pm CD = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$，和公式解法是一致的．

II 5 的另一种形式是恒等式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

---

1) 英国数学家，格拉斯哥大学教授，几何学中"西姆森线"的发现者．

其中 $a=AD$，$b=DB$，$\frac{a+b}{2}=CB$，$\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}=CD$。这是很有用的恒等式.

若令 $a=(2n+1)^2$，$b=1$，代入上式化简为

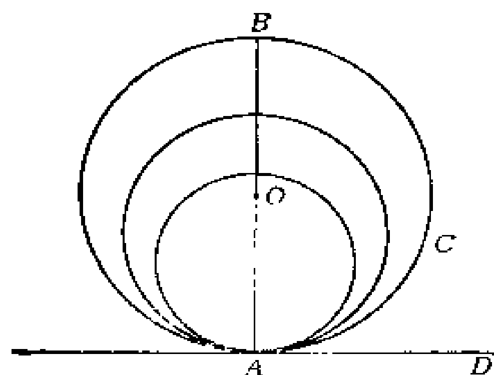
$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2.$$

可得由毕达哥拉斯求出的勾股数组（用正整数表示直角三角形的三边）：$2n+1$，$2n^2+2n$，$2n^2+2n+1$。

与此相仿，命题 6 相当于求解另一种类型的方程 $x^2+ax-b^2=0$。

命题 11：分已知线段为两部分，使它与一小线段所构成的矩形等于另一小线段上的正方形.相当于解方程 $x^2+ax-a^2=0$. 这就是将线段分成“中末比”，后来叫做“黄金分割”的著名问题.后面卷 IV 命题 10 “作一等腰三角形，使底角是顶角的两倍”，也就是作出 36°及 72°角，从而能作出正 5 边形和正 10 边形。卷 VI 命题 30：“截已知线段成中末比”，都是同一问题的不同表现形式. 卷 XIII 命题 9 再次提出正 10 边形、正 6 边形与中末比的关系，可见欧里几得很重视这个分割.

命题 12，13 是三角学中的余弦定理：



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

不过也是用几何的语言来叙述的，没有出现三角函数。

卷 III 有 37 个命题，讨论圆、弦、切线、圆周角、圆内接四边形及有关圆的图形等。

较引人注目的是命题 16：过直径 AB 端点 A 的垂线 AD 必在圆外，半圆周 ACB 与 AD 之间不可能再插入其他直线，半圆周 ACB 与 AB 之间的角比任何锐角都大，剩下的角（$\overset{\frown}{AC}$ 与 AD 间的角）比任何锐角都小。

$\breve{AC}$ 与 AD 间的角究竟算不算角？在历史上有很大争论．在普罗克洛斯的评注中称它为“牛角”（horn-like angle），这绰号在欧几里得以前早已有，在《原本》中没有使用，也没有说它的值是零．若作一系列切于 A 点的圆，似乎圆越小，“牛角”越大，但命题的结论并非如此．如果说它的值是零，角边应处处重合，而图形不是这样．这些疑问按现在曲线交角的定义已经解决，“牛角”的值是零．

卷 IV 有 16 个命题，包括圆内接与外切三角形、正方形的研究，圆内接正多边形（5 边、10 边、15 边）的作图．

最后一题是正 15 边形的作图．普罗克洛斯认为和天文学有关，因为在埃拉托塞尼（Eratosthenes，约公元前 276—前 195）之前，希腊天文家认为黄赤交角（黄道与天球赤道交角）是 24°，即圆周角 360°的 1/15．后来埃拉托塞尼测出是 180° 的 11/83，约 23°51′20″[1]．

卷V是比例论．后世的评论家认为这是《原本》的最高的成就[2]．毕达哥拉斯学派过去虽然也建立了比例论，不过只适用于可公度量．如果 A，B 两个量可公度，即存在两个正整数 m，n 使得 $mA=nB$，那么 $\frac{A}{B}=\frac{n}{m}$ 就是一个数．但若 A，B 不可公度，希腊人包括欧几里得就根本不承认 $\frac{A}{B}$ 或 $A:B$ 是一个数．毕达哥拉斯甚至认为 A 与 B 无法相比．这样就很难建立关于一切量的比例理论．摆脱这一困境的是欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus，公元前 4 世纪），他用公理法重新建立了比例论，使它适用于所有可公度与不可公度的量．可惜他的著作已全部失传，好在还有相当一部分保存在《原本》中，如卷V就主要取材于欧多克索斯的工作，

1）黄赤交角随着时间的推移略有减少，现代的精确值是 23°27′8″，古代测得的值较大是合理的．

2）I．巴罗（Barrow）评论（1666）说：“在整个《原本》中，再没有比比例理论更精巧的创造、更稳固的建立、更妥善的安排了”．A．凯莱（Cayley）说：“在数学中很难找到像令人赞叹的（《原本》）第 5 卷那样优美的篇章．”

当然也有欧几里得本人的加工整理，有的还散见于卷 XII, VI, X, XIII 之中。

卷 V 首先给 18 个定义。定义 3：比是两个同类量之间的大小关系。定义 4：如果一个量加大若干倍之后就可以大于另一个量，则说这两个量有一个“比”（ratio）。这样就突破了毕达哥拉斯认为只有可公度量才可以比的限制。实际上，如果承认了“阿基米德公理”或“欧多克索斯公理”（在卷 X 命题 1 正式使用）：“两个有限的同类量，任一个加大适当的倍数后就能大于另一个”，任何两个有限量都有比，不必考虑可否公度。尽管不承认这个“比”是数，仍然不妨碍以此为起点建立适用于一切量的比例论。

现在已经有严格建立的实数理论和完整的比例论，如果 $A:B = C:D$，则有

$$mA:nB = mC:nD$$

（m，n 是任意正整数），从而

$$\text{由 } mA > nB \text{ 可推出 } mC > nD,$$
$$\text{由 } mA < nB \text{ 可推出 } mC < nD,$$
$$\text{由 } mA = nB \text{ 可推出 } mA = nB.$$

这是比例的基本性质。《原本》巧妙地利用这一性质来作比例的定义，即

定义 4：设有 A，B，C，D 4 个量，A 与 C，B 与 D 分别乘以同样的倍数 m，n，如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB \text{ 可推出 } mC \gtreqless nD,$$

则说两个比 $A:B$ 与 $C:D$ 相等，即 4 个量可构成比例 $A:B = C:D$。

这定义是整个理论的基础，由此推出 25 个有关比例的命题。

近代实数理论中的“戴德金分割”实际上受这比例定义的启发[1]。

1）参考 В. И. Костин. Основания Геометрии, 1948（中译本：几何学基础，商务印书馆，1954，p.20）。

设有 A，B 二量，任取分数 $\frac{n}{m}$，比较 mA 与 nB 的大小，

如 $mA > nB$，$\frac{n}{m}$ 归入第 1 类；

如 $mA < nB$，$\frac{n}{m}$ 归入第 2 类；

如 $mA = nB$，$\frac{n}{m}$ 归入第 3 类.

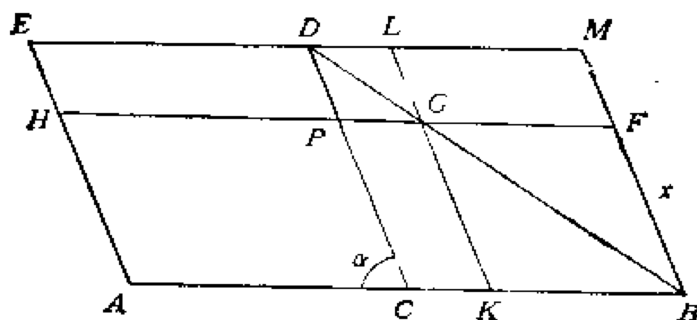
每一个分数必归入一类且只归入一类. 设 $\frac{n_1}{m_1}$，$\frac{n_2}{m_2}$ 分别是第 1 类及第 2 类的分数，则由

$$m_1A > n_1B,$$
$$m_2A < n_2B,$$

两式相除，得 $\frac{m_1}{m_2} > \frac{n_1}{n_2}$ 或 $\frac{n_2}{m_2} > \frac{n_1}{m_1}$，即第 2 类的数必大于第 1 类的数，于是全体有理数构成一个"戴德金分割"。如果 $mA = nB$，说明 A，B 可公度，$\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ 是一个有理数。如 A，B 不可公度，则第 3 类数是空集，这一分划定义了一个无理数 α，α 就是 $\frac{A}{B}$ 的值。可以看出来，分划的思想和上述比例定义是一脉相承的.尽管两者的思想很接近，但欧几里得始终不把 $A:B$ 和数联系起来考虑，因而从来没有出现 $A:B$ 与 $C:D$ 相加或相乘的情况。这是时代的局限性，无理数理论的产生，足足拖延了两千多年.

卷 VI 把卷V已建立的理论用到平面图形上去，共 33 个命题。处理相似直线形中的各种成比例的线段等。其中命题 27—30 颇重要。

命题 27：设 C 是线段 AB 中点，在 AC 上作 $\square ACDE$ [原文的说法是将平行四边形贴合（apply）到 AB 上]，又在 AB 的部分线段 KB 上作 $\square KBFG \backsim \square AD$，延长 FG 交 CD 于 P，



交 AE 于 H，求证 $\square AG < \square AD$。

因 $\square KF \backsim \square AD \backsim \square CM$，故对角线 BG, BD 重合．$\square KM = \square CF = \square AP$，两端同加上 $\square CG$，即知 $\square AG =$ 磬折形 $PCBMLG < \square CM = \square AD$．本题给出求极大极小的一种途径．和代数方法比较：

设 $AB = a$，$AE = b$，$\angle ACD = \alpha$，$BF = x$，则 $KB : x = \frac{a}{2} : b$，$KB = \frac{a}{2b}x$，$AK = a - \frac{a}{2b}x$，

$$\square AG \text{ 面积 } S = x\left(a - \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha,$$

即

$$x^2 - 2bx + \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0.$$

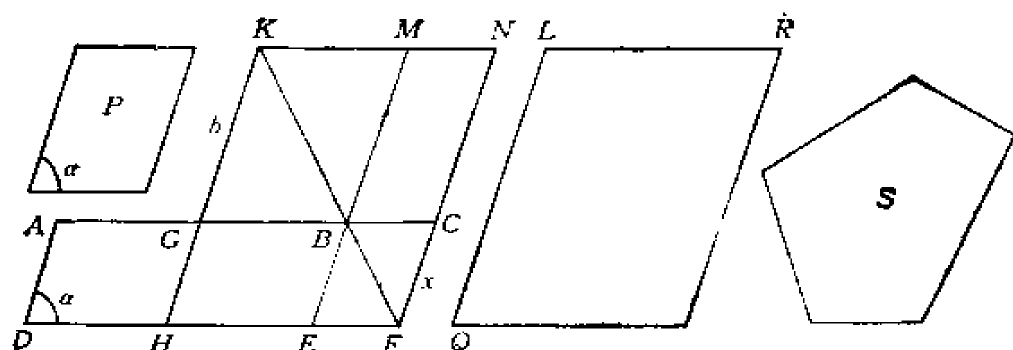
这 2 次方程有实根的充要条件是判别式非负，即

$$S \leqslant \frac{ab}{2}\sin\alpha,$$

这正是命题的结论。 $x = b$ 时 S 取最大值。

特例：如果 $\alpha = 90°$，$b = \frac{a}{2}$，则 $\square AD$，$\square KF$ 都是正方形，$\square AG$ 是矩形，它的周长是常数 $2a$。于是推出有相同周长的矩形中，以正方形面积最大的结论。

命题 29 相当于某种类型的 2 次方程解法：作 $\square ADFC$ 贴



合到 AB 上，使其等于已知面积 S，且 AC 边超出 AB 的部分 BC 上的 $\square BEFC$ 与已知 $\square P$ 相似。

作法是取 AB 中点 G，在 GB 上作 $\square GBMK \backsim \square P$，另作 $\square QR$，使其面积等于 $\square GM$ 与 S 之和(根据 VI，25)，延长 KM 至 N，KG 至 H，使 $KN = LR$，$KH = LQ$，完成 $\square KHFN$，连对角线 KF，完成 $\square BEFC$，$\square ADFC$.因为 $\square BN = \square HB = \square DG$，又 $\square HN = \square QR = \square GM + S$，故知磬折形 $GHFNMB = S = \square HC + \square BN = \square HC + \square DG = \square DC$. 故 $\square DC$ 即为所求。

设 $AB = a$，$GK = b$，$FC = x$，$\angle ADF = \alpha$，则 $EF : x = \frac{a}{2} : b$，$EF = \frac{a}{2b}x$，$DF = a + \frac{a}{2b}x$，$\square DC = S = x\left(a + \frac{a}{2b}x\right) \cdot \sin\alpha$，即

$$x^2 + 2bx - \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0.$$

本命题就是这 2 次方程的几何解法。

《原本》多次使用"贴合"(application，παραβολή)这个词，命题 27 所作的平行四边形未占满整个线段，这叫做"不足"(falling short，ἔλλειψις)，命题 29 则超过了已知线段，叫做"过剩"(exceeding，ὑπερβολή)。这些术语后来阿波罗尼奥斯用到圆锥曲线上，希腊文"不足"转化成 ellipes (椭圆)，"过剩"转化为 hyperbola (双

曲线),"贴合"变成 parabola(抛物线)。

卷 VII, VIII, IX 是数论,分别有 39, 27, 36 个命题,讨论正整数的性质与分类。数被看作是线段,两数的乘积叫做平面(plane)或平面数(定义 16),这两个数叫做平面的边。三个数的乘积叫做立体(solid)或立体数(定义 17),这三个数叫做立体的边。

这一卷许多内容和卷V相同,欧几里得为什么不把卷V的结论直接搬过来用,而非要重新论证一遍不可?这大概是他不把数看作普通的量,因为卷V中讨论的量包括可公度和不可公度量,而这一卷只牵涉到有理数。也可能他认为数论可以建立在较简单的基础上,所以单独处理[1]。

卷首共给出 22 个定义。定义 20:如果第 1 数之为第 2 数的某个倍数或某个部分,与第 3 数之为第 4 数的某个倍数或某个部分相同[2],则这 4 个数成比例。这定义完全回到毕达哥拉斯学派可公度量的比例论上去。

定义 22:一个数等于它自身的部分(即真因子)之和,这数叫做完全数。

命题 1,2 就是"欧几里得辗转相除法"(Euclidean algorithm)的出处。两数辗转相除,最后得到最大公约数,如最大公约数是 1,则两数互素。命题 4—20 是数的比例问题,命题 21—32 是关于素数的问题。

命题 30:某素数能整除两数之积,则此素数至少能整除两数之一。这在数论中是很重要的。

命题 31:任何合数必被某一素数整除。在证明中提出"任何正整数集必有最小数"(现在叫做良序性)的假定。

命题 33—39 讨论最小公倍数。

---

1) 另一种意见是欧几里得未来得及修订《原本》就已去世,以致留下这样不恰当的安排。此说出自 A. 德摩根(De Morgan)《欧几里得》(Eucleides, 1846)。又见 W. W. R. Ball, A short account of the history of mathematics, Dover Publications, 1908 p.58.

2) 即两个比值相等,就可以构成比例。

卷 VIII 讲连比例(实际就是等比数列),平面数、立体数的性质.

卷 IX 有几个命题是值得注意的.命题 14: 如果某一数是被某些素数所整除的数中之最小者,则这一数不能被这些素数以外的任何素数整除。这就是算术基本定理:合数的素因子分解是唯一的。

命题 20: 素数的个数比任意给定的素数都多.证明是用反证法,设 A, B, C 是给定的素数,则 $ABC+1$[1] 或者是素数或者含有异于 A, B, C 的素因子,两者都可以推出有多于 A, B, C 的素数存在.

命题 35 导出等比数列的求和公式,在形式上和现在常见的不同。

设 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, a_{n+1} 是等比数列,命题结论是

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}.$$

如将数列改写为 a, ar, ar^2, $\cdots$, ar^{n-1}, ar^n, 前 n 项和记作 S_n, 上式即化为常见的形式

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

接着命题 36 证明了数论中一个有名的定理: 若 2^n-1 是素数,则 $(2^n-1)2^{n-1}$ 是完全数.

事实上,设等比数列 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$ 的和 $P=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 是素数, 则 $2^{n-1}P$ 被下列各数整除: $1, 2, \cdots, 2^{n-1}, P, 2P, \cdots, 2^{n-2}P$ 且不被任何其他小于它自身的数整除,而这些因子的和正好等于 $2^{n-1}P$,

$$1+2+\cdots+2^{n-1}+P+2P+\cdots+2^{n-2}P$$
$$=P+P(2^{n-1}-1)=(2^n-1)2^{n-1}.$$

---

1) 原来的说法是: 设 DE 是被 A, B, C 量尽的最小数, DE 加上单位 EF 得 DF.

现在形如 2^n-1（n 是素数）的素数叫做"梅森素数"，因 M. 梅森（Mersenne, 1588—1648）曾深入研究而得名. 有一个梅森素数就相应有一个完全数. 前 4 个完全数 6，28，496，8128 已为希腊人所知[1].

卷 X 是篇幅最大的一卷，约占全书的 1/4，和其他各卷不很相称. 包含 115 个命题，有的版本是 117 个命题(如清译本). 主要讨论无理量(不可公度量)，但实际只牵涉到相当于 $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 之类的无理量，即 2 次或 4 次不尽根，这只是无理量的极小一部分，欧几里得使用"有理"、"无理"的术语，和现代的意义不同. "有理"的原文是 ῥητός，原意是"可表达的"（expressible），后来译为"有理的"（rational). 如果给定一个叫做有理的线段 A，若另一线段 B 和 A 有公度，就说 B 是"线段可公度有理量". 用现代的术语来说，就是设 A 是有理量(线段)，m 是任意有理数，则 mA 是"线段可公度有理量". 但若 m 不是平方数，则 $\sqrt{m}A$ 不是"线段可公度有理量"，它叫做"正方形可公度有理量". 意思是在 A 与 $B=\sqrt{m}A$ 上所作的正方形可公度. "正方形可公度"（commensurable in square）是《原本》的特殊用语. "线段可公度有理量"显然都是"正方形可公度有理量"，但反过来，"正方形可公度有理量"可以不是"线段可公度有理量，"如 $\sqrt{m}A$，这种情形特别叫做"仅正方形可公度有理量". 不管那一种情形，都叫有理量. 一个量平方以后仍然不可公度，如 $\sqrt[4]{m}$，才叫做无理量.

本卷将无理量分为 13 大类，各给专门的名称. 当时没有符号，叙述起来相当困难. 用现代的眼光看，这种分类没有多少用处，甚至可以说是"作茧自缚"，它没有推进无理量的发展.

这一卷命题 1 非常重要：给定大小两个量，从大量中减去它的一大半，再从剩下的量中减去它的一大半，这手续重复下去，可使所余的量小于所给的小量.

---

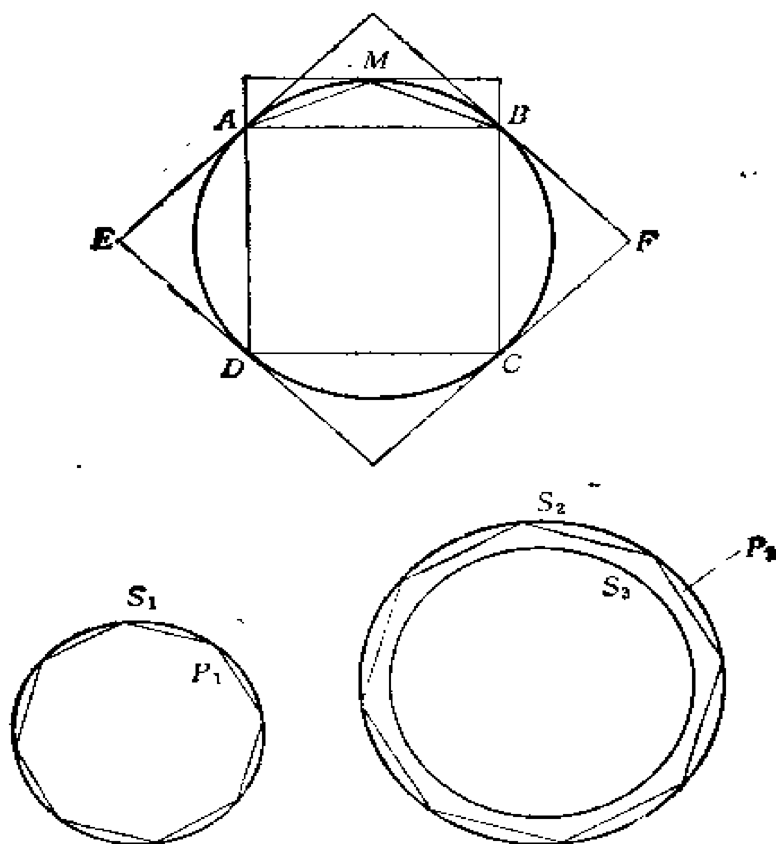
1) 载入尼科马霍斯（Nicomachus）《算术入门》第 16 章.

这是极限论的雏形，也是"穷竭法"的理论基础，和后面各卷有密切关系。在证明中实际默认了阿基米德公理。

有的版本最后还有命题 117，证明正方形一边与对角线不可公度，有时叫做"欧几里得奇偶数证法"，经考证这是后人掺入的，所以后来的校订注释者只将它放入附录中。

卷 XI 是立体几何，讲空间中的平面、直线、垂直、平行、相交等关系，还有多面角、平行六面体、棱锥、棱柱、圆锥、圆柱、球等问题，共 39 个命题。

卷 XII 是穷竭法 (method of exhaustion)[1] 的应用。这是希



1) exhaustion 这个词有双重含义。一是将所有可能情形都一一考虑到的一种证明方法，多用于反证法，今译为"穷举法"；另一种是指某一个图形（如圆）被另一个图形（如内接正多边形）所逐步"穷竭"（填满），译为"穷竭法"。使在汉语中两者不致相混。

腊人创造的强有力的证明方法，一般认为经欧多克索斯的手而臻于完善，以后被收入《原本》的卷 XII 中。

命题 2 是相当典型的，从中可以看到穷竭法的基本精神。要证明的是：圆与圆之比等于其直径平方之比。

作圆内接□AC，外切□EF，因□$EF=2$□AC，又□EF大于圆，故□AC包含圆面积的一半以上。取$\overset{\frown}{AB}$中点M，完成▭AMB，因▭$AMB=2\triangle AMB$，又▭AMB大于弓形AMB，故$\triangle AMB$包含弓形AMB一半以上。□AC的每一边都加上这样的△，就得到内接正 8 边形，它包含□AC以及圆与□AC之差的一半以上。同理作正 16 边形，它包含正 8 边形及圆与正 8 边形之差的一半以上。重复这个手续，每次边数加倍，根据卷 X 命题1，可得到一个边数足够多的内接正多边形，与圆面积之差小于任给的小量。

现有圆面积 S_1，S_2，直径各为 d_1，d_2，要证明

$$S_1:S_2=d_1^2:d_2^2.$$

设等式不成立而有

$$S_1:S_3=d_1^2:d_2^2,$$

S_3 是大于或小于 S_2 的某一面积。不妨设 $S_3<S_2$，作 S_2 的边数足够多的内接正多边形 P_2，使得 $S_2-P_2<S_2-S_3$，即 $S_3<P_2<S_2$。在 S_1 内作与 P_2 相似的内接正多边形 P_1，根据卷 XII 第 1 命题，

$$P_1:P_2=d_1^2:d_2^2,$$

于是有

$$P_1:P_2=S_1:S_3$$

或

$$P_1:S_1=P_2:S_3,$$

但 $S_1>P_1$，故 $S_3>P_2$，与前面不等式 $P_2>S_3$ 矛盾。同理可证若 $S_3>S_2$ 也一样产生矛盾。

下面用类似的方法证明了“锥体体积等于同底等高的柱体的1/3”（命题 7，10），“球体积的比等于直径立方的比”（命题 18）

等。全卷共 18 个命题。

卷 XIII 是最后一卷，共 18 个命题。前一部分研究了中末比的若干性质，最后 6 个命题讨论 5 种球内接正多面体的作图法。

《原本》的一些存在问题

（一）公理化结构是近代数学的主要特征。而《原本》是完成公理化结构的最早典范，它产生于两千多年前，这是难能可贵的。不过用现代的标准去衡量，也还有不少缺点。首先，一个公理系统都有若干原始概念或称不定义概念。点、线、面就属于这一类。而在《原本》中一一给出定义，这些定义的本身就是含混不清的。例如卷 I 的定义 4："直线是这样的线，在它上面的点都是高低相同地放置着的"就很费解，而且这定义在以后的证明中完全没有用到。其次是公理系统不完备，没有运动、顺序、连续性等公理，所以许多证明不得不借助于直观。此外，有的公理不是独立的，即可以由别的公理推出（如第 4 公设"凡直角都相等"）。这些缺陷直到 1899 年 D. 希尔伯特（Hilbert）的《几何基础》（Grundlagen der Geometrie）([14]）出版才得到了补救。尽管如此，毕竟瑕不掩瑜，《原本》开创了数学公理化的正确道路，对整个数学发展的影响超过了历史上任何其他著作。

（二）全书的组织安排也是可以改进的。如卷 V 已建立了一般量的比例论，而且在卷 VI 中已用之于几何，但后面的卷 VII 的数论却没有用它。这几卷数论基本上是毕达哥拉斯学派的成果，在理论水平上远逊于卷 V。其实卷 II 已提出几何代数学，接下去讲数论是顺理成章的。

卷 X 份量过于庞大，而且大部分和前后没有联系，现在证明其用处甚微。整个《原本》并不企图将当时已有的几何知识纳入其中（例如三角形三个高交于一点这样普通的定理也未收入），只是精选最基本命题作为《原本》的内容。本着这种精神，卷 X 应大大压缩。

（三）有的书[1]指出，《原本》的证明常常是以偏概全的，即对一般性定理只给出特例的证明，或者只用了某些具体数据而忽略了普遍性，这种情况的确比比皆是．不过批评者可能不了解欧几里得的用意．《原本》当时是作为教科书或讲义来使用的，如果一个问题有若干种情形，证明了其中一种之后，其余的留给学生自证，这在今天也是司空见惯的．以卷 I 命题 7 为例，从线段 AB 的两端分别作一直线交于一点 C，则在同一侧不可能再有交于另一点 D 的两线段 AD，BD，使得 $AC=AD$，$BC=BD$．证明是用反证法，设 D 点落在 $\triangle ABC$ 之外，由此推出矛盾．而 D 点落在 $\triangle ABC$ 内的情形就没有讨论．后世有的注释者如克拉维乌斯认为不够全面，把所有可能情形都增补上去（见明译本），包括 D 点落在 AC 或 BC 的延长线上以及 $\triangle ADB$ 完全被包含在 $\triangle ABC$ 之中等等．希思译本保留了原书的面貌，只在注释中加以说明．

还有一种以偏概全的情形是只用某个具体的数字来证明一般性的结论．如卷 IX 命题20：素数的个数比任意给定的素数都多．证明时只给定 A，B，C 三个素数，由此推出还有别的素数存在．现在的严格证法无非是将三个改为任意 n 个，这在方法上并没有什么区别．

《原本》对我国数学的影响

中国传统数学最明显的特点是以算为中心．虽然也有逻辑证明，但却没有形成一个严密的公理化演绎体系，这也许是最大的弱点．明末《原本》传入，应该是切中时弊，正好弥补中算之不足．可是实际情况并不理想．

徐光启本人对《原本》十分推崇，也有深刻的理解．他认为学习此书可使人"心思细密"．在译本卷首的《几何原本杂议》中

1）例如 M. Kline. Mathematical thought from ancient to modern times Oxford Univ. Press 1972（中译本：M. 克莱因，古今数学思想，上海科技出版社，1979，第一册 p.99）．

说："人具上资而意理疏莽，即上资无用；人具中材而心思缜密，即中材有用；能通几何之学，缜密甚矣，故率天下之人而归于实用者，是或其所由之道也."在他的大力倡导下，确实也发挥一定的作用，可惜言者谆谆，听者藐藐，要在群众中推广，仍然有很大的困难，他在《杂议》中继续写道："而习者盖寡，窃意百年之后，必人人习之."他只好把希望寄托于未来.

明末我国正处在数学发展的低潮，《原本》虽已译出，学术界是否看到它的优点，大有疑问．事实上，明清两代几乎没有人对《原本》的公理化方法及逻辑演绎体系作过专门的研究．康熙以后，清统治者实行闭关锁国、盲目排外的政策．知识分子丧失了思想、言论自由，为了逃避现实，转向古籍的整理和研究，以后形成以考据为中心的乾嘉学派．徐光启之后，数学界的代表人物是梅文鼎(1633—1721)，他会通中西数学，对发扬中国传统数学及传播西方数学均有贡献，然而却没有认识到公理方法的重要性．他认为西方的几何学，无非就是中国的勾股数学，没有什么新鲜的东西．他在《几何通解》中写道："几何不言勾股，然其理并勾股也．故其最难通者，以勾股释之则明．……信古《九章》之义，包举无方．"（见[17]，卷 18.）又在《勾股举隅》中说："勾股之用，于是乎神．言测量至西术详矣．究不能外勾股以立算，故三角即勾股之变通，八线乃勾股之立成也."（见[17]，卷 17.）类似的说法还有多处．他见到的只是几何的一些命题，至于真正的精髓——公理体系及逻辑结构，竟熟视无睹．梅文鼎这种"古已有之"的观点，也是妄自尊大和保守思想的反映。由于他当时的威望，确实产生了一些消极的影响。

其 他 著 作

欧几里得还有好几种著作，可惜流传下来的不多.

(一)《已知数》(The data) 是除了《原本》以外唯一保存下来的希腊文纯粹几何著作．包含 94 个命题，后来被收人帕波斯的

《分析集萃》(Treasury of Analysis)中．内容和《原本》卷 I—VI 相仿，但问题的提法不同．例如开头所给出的定义，是解释何谓"已知的"．定义 1：面积、线段、角叫做已知的，如果可以作出和它们相等的同类量．定义 5：一个圆叫做已知的，如果它的半径已知．等等．

全篇的中心内容是指出图形内的某些元素若为已知，则另外的元素也是已知的（即可以确定）．如命题 84：若两条线段以一定的夹角构成一个已知面积，又两线段的差已知，则两线段即为已知．这相当解联立方程

$$y - x = a$$
$$xy = b^2$$

或 2 次方程

$$x^2 + ax - b^2 = 0.$$

（二）《图形的分割》(On divisions of figures) 是另一本几何著作，但不是希腊文本．现有的两种存本都来自阿拉伯文本．第一种的拉丁文本由 J. 迪伊（Dee, 1527—1608）发现并于 1570 年出版，这种版本不甚完整．另一种为 F. 韦普克（Woepcke, 1826—1864）在巴黎所发现，于 1851 年出版，现有英译校订本（[3]）．此书的中心思想是作直线将已知图形分为相等的部分、成比例的部分或分成满足某种条件的图形．共 36 个命题．如命题 1：作平行于底边的直线将三角形分成相等的两部分．命题 4：作平行于上下底的直线将梯形分为相等的两部分．命题 29：作二平行弦将已知圆分成给定的比例．

（三）下面几种几何著作已失传．《纠错集》(Pseudaria, 或 Book of fallacies) 目的在指出初学几何者常见的错误，引导他们走上正确的道路，普罗克洛斯曾提到此书．《推论集》(Porisms) 是一部较高级的几何学，在帕波斯的《分析集萃》中有较详细的描述．"Porism" 这个词有双重意义，一是普通的推论 (corollary)，二是指某些与定理不同的命题，定理一般要求证明某个结论，而 "porism" 是要找出某种事物而不仅仅证明它成立或存在．如要根

据给定条件找出圆心等。按帕波斯的说法，欧几里得曾写了四卷的《圆锥曲线》(Conics)，它是后来阿波罗尼奥斯 8 大卷《圆锥曲线论》的基础。另一本失传的著作《曲面轨迹》(Surface loci) 是讨论轨迹的问题。

(四) 几本应用数学著作。《现象》(Phaenomena) 是一本几何天文学，最先使用地平圈 (Horizon)、子午圈 (meridian) 等术语，参考了奥托利科斯的工作及不知名作者的球面几何学。《光学》(Optics) 是希腊文的第一本透视学，从 12 个假设(公设)出发推出 61 个命题。假设 1 是"人看到物体，是光线从眼睛出发射到所看的物体上去"。这是从柏拉图以来的传统观点。命题 6 是"处于平行位置，大小相同但距离不同的物体，在眼中看到的大小并不与远近成比例"。这相当于证明了当 $\alpha < \beta < \pi/2$ 时

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} < \frac{\alpha}{\beta}.$$

此外，欧几里得还写过音乐和力学的书。看来他是很博学的，不象人们通常认为的那样，欧几里得的贡献只是初等几何。不过，经过两千多年的历史考验，影响最大的仍然是《原本》。

文 献

原始文献

[1] J. L. Heiberg and H. Menge, Euclidis opera omnia. 8 vols, Leipzig, 1883—1916.

[2] T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's elements with introduction and commentary, 3 vols., Dover Publications, Inc., 1956.

[3] R. C. Archibald, ed., Euclid's book on divisions of figures, Cambridge University Press, 1915.

[4] 利玛窦 (Matteo Ricci)，徐光启译，《几何原本》卷 I—VI，1607，收入《丛书集成初编》，商务印书馆，1939。

[5] 伟烈亚力(Alexander Wylie)，李善兰，《几何原本十五卷》(包括利玛窦、徐光启译的卷 I—VI 及伟烈亚力、李善兰译的卷 VII—XV)，1857，金陵版1865。

研究文献

[6] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard

University Press, I 1957.
[7] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press 1931.
[8] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, I 1921.
[9] I. Mueller, Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements, The MIT Press, 1981.
[10] E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides, 2 vols., Groningen, 1929—1930.
[11] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Arno Press, 1976.
[12] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Co., I 1923.
[13] R. E. Moritz, On mathematics and mathematicians, Dover Publications, Inc. 1942, p 152.
[14] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 七版，1930(中译本：D. 希尔伯脱，几何基础，第一分册，科学出版社，1958).
[15] 李俨，中国算学史，商务印书馆，1955.
[16] 严敦杰，欧几里得几何原本元代输入中国说，东方杂志，39(1943)，13号.
[17] 梅文鼎，梅氏丛书辑要，1761，1874 版.

阿 基 米 德

梁 宗 巨

（辽宁师范大学）

阿基米德（Archimedes）公元前 287 年生于西西里岛（Sicilia，今属意大利）的叙拉古（Sracusa，一译锡拉库萨）；公元前 212 年卒于叙拉古。数学、力学、天文学。

和其他的古希腊数学家相比，阿基米德的生卒年是比较确实的。J. 策策斯（Tzetzes，约 1110—约 1180）在《史书》（Book of histories）[1] 中记载："智者阿基米德是叙拉古人，著名的机械制造师，终生研究几何，活到75岁"。阿基米德之死，T. 李维（Livius，公元前 59—公元 17 年）[2]、普卢塔克（Plutarch，约公元 46—119 年之后）[3]、策策斯等历史学家作了不同的描述，但一致同意他是在叙拉古陷落（公元前 212 年）时被罗马兵所杀的。倒推回去，应生于公元前 287 年。

阿基米德是叙拉古统治者海厄罗王（Hiero II，约公元前308—前 216 年，约公元前 270—前 216 年在位）的亲戚，和王子吉伦（Gelon，后继承王位）友善。父亲菲迪亚斯（Phidias）是天文学家。

阿基米德早年曾在当时希腊的学术中心亚历山大跟随欧几里得的门徒学习，对欧几里得数学进一步的发展作出了一定的贡献。

1）拜占庭诗人兼历史学家，《史书》又称《千行诗集》（Chiliades），实际是 1.2 万行，包括文学、历史等方面的资料。

2）罗马 3 大历史学家之一，著 142 卷的《罗马史》（The Annals of the Roman People）。

3）希腊传记作家，写过大量作品，最有名的是《希腊罗马名人比较列传》（Parallel Lives）。此书选择希腊与罗马人事迹相近者加以比较。

在那里结识许多同行好友，如科农（Conon of Samos，公元前 245 年前后）[1]、多西修斯（Dositheus，公元前 225 年前后）[2]以及埃拉托塞尼（Eratosthenes）等等。回到叙拉古以后仍然和他们保持密切的联系，因此阿基米德也算是亚历山大学派的成员，他的许多学术成果就是通过和亚历山大的学者通信往来保存下来的。后人对阿基米德给以极高的评价。数学史家 E. T. 贝尔（Bell，1883—1960）说：任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家的名单中，必定会包括阿基米德，另外两个通常是牛顿和高斯。不过以他们的丰功伟绩和所处的时代背景来对比，拿他们的影响当代和后世的深邃久远来比较，还应首推阿基米德。（见[5]，p. 20.）普林尼（Pliny，公元 23—79年）[3]甚至称阿基米德为“数学之神”（见[6]，p. 111.）这些过分的赞扬，反映了后世对阿基米德的崇敬。

赫拉克利德（Heraclides）曾写过阿基米德的传记，欧托基奥斯（Eutocius of Ascalon，约生于公元 480 年）[4]不止一次提到这件事，可惜传记已失传。阿基米德的生平事迹，散见于各种古代的文献中。

金 冠[5] 之 谜

维特鲁维厄斯（Marcus Vitruvius Pollio，公元前 1 世纪上半叶—约公元前 25 年）[6]是罗马有名的建筑学家，以传世的 10 卷《建

1）生于萨摩斯（Samos）岛，天文学家、数学家，以善辨星座著称，他的圆锥曲线研究为日后阿波罗尼奥斯所引用。

2）科农的学生和朋友，研究历法和天气预报。

3）罗马时代的科学史家，著有 37 卷的《自然史》（Historia naturalis，一译《博物志》），公元 79 年维苏威火山爆发，亲往观察，并从事救援工作，不幸中毒窒息而死。

4）希腊数学著作的注释家。

5）准确地说，是祭祀用的环状花冠（wreath）现依习惯叫做王冠。

6）和他同时代，罗马有一个政治家叫波利奥（Gaius Asinius Pollio），历史学家为了区别起见，就把这位建筑学家简称为 Vitruvius.

筑学》(De Architectura Libri X)[1]著称．这书第 IX 卷记述了一段传诵千古的逸事．(见[7],p.37.)叙拉古的海厄罗王的政治威望及权势日益提高，为了报答诸神的德泽，他决定建造一个华贵的神龛，内装一个纯金的王冠，作为谢恩的奉献物[2]．

金匠如期完成了任务，理应得到奖赏．这时有人告密说金匠偷去一部分金子，以等重的银子掺入．国王甚为愤怒，但又无法判断是否确有其事．便请素称多能的阿基米德来鉴定一下，他也一时想不出好办法来．正在苦闷之际，他到公共浴室去洗澡，当浸入装满水的浴盆去的时候，水漫溢到盆外，而身体顿觉减轻．于是豁然开朗，悟到不同质料的物体，虽然重量相同，但因体积不同，排去的水必不相等．根据这一道理，不仅可以判断王冠是否掺有杂质，而且知道偷去黄金的份量．这一发现非同小可，阿基米德高兴得跳了起来，赤身奔回家中准备实验，口中不断大呼"尤里卡！尤里卡！"(Eureka，意思是"我找到了".)[3]

这问题可解释如下：设王冠重 W，其中金与银分别重 W_1，W_2，而 $W=W_1+W_2$．分别取重为 W 与 W_1 的纯金放入水中，设排去水的重各为 F_1 与 x，则 $W:W_1=F_1:x$，即 $x=\frac{F_1W_1}{W}$．同样，分别取重为 W 与 W_2 的银放入水中，设排去水的重量各为 F_2 与 y，于是 $W:W_2=F_2:y$，即 $y=\frac{F_2W_2}{W}$．现将王冠放水中，设排去水的重为 F，则

$$F=\frac{F_1W_1}{W}+\frac{F_2W_2}{W}$$

---

1) 1486 年首次在罗马印刷出版；有 M. H. Morgan 的英文本，1915.

2) 有的书说成是国王自己戴的金冠，这不太合情理，因为金冠要有相当大的体积才能从排开的水判断体积是否异常，也才能混入银子，这样的金冠会很重，明定陵出土的金冠其薄如纱，是否含银一目了然，那么小的体积用排水法也未必能辨真伪．

3) 希腊语为 εὕρηκα；由于阿基米德的故事家喻户晓，这个字已成为全世界的共同语言，表达突然获得某种发现时的惊呼；英文、西班牙文为 eureka．法文为 eurêka．德文为 heureka，意大利文为 èureka．俄文为 эврика 等．

由此推得 $F(W_1 + W_2) = F_1W_1 + F_2W_2$，即

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F - F_1}{F_2 - F}.$$

用实验可求出 F, F_1, F_2，即可算出银与金之比值[1]。如 $F = F_1$，说明没有掺银。实际情况是两者不等，从而揭穿了金匠的劣行。

经过仔细实验和反复思考，将经验上升为理论，他终于发现了流体静力学的基本原理——阿基米德原理：物体在流体中减轻的重量，等于排去流体的重量。后来总结在他的名著《论浮体》(Floating bodies) 中成为第 7 命题。(见[3]，p.376.)

豪 言 壮 语

帕波斯 (Pappus) 的《数学汇编》(Mathematical collections) 记载，阿基米德建立了杠杆定律(若两物体与支点的距离反比于其重量，则杠杆平衡)之后，解决了"用给定的力去移动任何给定的重物"的问题，曾发出豪言壮语："给我一个立足点，我就可以移动地球！"(δός μοί ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν)。

普卢塔克 (Plutarch，约公元 46—119 年以后)的《马塞勒斯传》(Marcellus)中有更详细的描写.阿基米德对海厄罗王说：任何重物都可以用一个给定的力来移动。"如果另外有一个地球，就可以站在那上面移动这一个"。海厄罗王大为诧异，想考验一下这惊人的论断是否可靠，要求他用事实来证明。阿基米德从国王的船队中选定一艘有三根桅杆的货船，这种船通常要用很多人花很大力气才拖得动它。阿基米德安装了一组滑轮，自己站在远处，手握绳子的一端，轻而易举将船平稳地拉过来，好象它在海上行驶一

---

1) 古代文献记述了解决问题的两种方法。一是量等重的金、银、王冠三者排去水的体积(维特鲁维厄斯)；另一是称三者在水中的重量，即物体原重减去在水中的浮力，这是大约写于公元 500 年的一首诗所说的办法，见[10]，p. 92. 此处的推导略有不同，是称三者排去水的重量. 在古代，称重量也许比量体积更容易一些.

详。

按普罗克洛斯（Proclus）的说法，这艘船是海厄罗王特地为托勒密王（Ptolemy）建造的，下水时几乎动员了所有的叙拉古人。而阿基米德凭着他发明的机械，使国王自己一个人就把它拖动。国王佩服得五体投地，当即宣布："从现在起，阿基米德说的话我们都要相信"。（见[2]，p. 19.）

辛普利休斯（Simplicius，6 世纪上半叶）在注释亚里士多德的《物理学》（Physica）时，说阿基米德发明了一种"神力器"(charistion）之后，曾声称："有立足点，我将移动地球！"（πᾶ βῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν，见[3]，p.16.）策策斯则说阿基米德宣称要用"神力器"去移动地球。

上述几种记载内容大致相同。阿基米德真的能移动地球吗？不妨作一个简单的计算。那时他并不知道地球有多重，现在知道地球质量是 6×10^{27} 克。假想用杠杆来举起地球，加 60 公斤(6×10^4 克）的力，那么力臂应该是重臂的 $6\times10^{27}\div6\times10^4=10^{23}$ 倍。要举起地球 1/10000 毫米，力臂的一端应走过 10^{15} 公里以上。每天 24 小时以短跑的速度走过这个距离，至少要 30000 年！换句话说，即使略去杠杆本身的重量不计，阿基米德用尽毕生的力量，也休想移动地球分毫。不过这位伟大的古代力学家，只因为不知道地球的大小，以致作出错误的判断，这是可以谅解的。

叙拉古保卫战

在阿基米德的一生中，最悲壮、最惊心动魄的一幕是他以古稀之龄，投身于反侵略战争，最后为国捐躯。

迦太基（Carthage）是古代腓尼基（Phoenicia）人建立的国家。以现今非洲北部的突尼斯为中心，领土东到西西里岛，西达西班牙和摩洛哥。由于商业和殖民利害的冲突，从公元前 264 年起到前 146 年为止，前后三次和罗马人进行了猛烈的大搏斗，延续 120 年之久。罗马人称迦太基人为腓尼(Poeni)，转为布匿(Punic)，

故史称布匿战争。第二次布匿战争发生于公元前 218—前 201 年，叙拉古和迦太基缔结同盟，因此成为罗马的仇敌。公元前 214 年，罗马名将马塞勒斯 (Marcus Claudius Marcellus, 约公元前 268—前 208 年)率领大军围攻叙拉古。在这危急存亡之秋，阿基米德便献出自己一切杰出的科学技术为祖国效劳。

详细记述这次保卫战的主要有三种书：波利比奥斯(Polybius, 约公元前 200—前118 年)的《通史》(Historiae, 共 40 卷)，李维的《罗马史》及普卢塔克的《马塞勒斯传》(Vita Marcelli)。此外策策斯、卢西恩 (Lucian, 约公元 120—180 年以后)等也有所论述。

马塞勒斯从陆上及海上袭击叙拉古。阿基米德用他发明的起重机之类的器械将靠近墙根的船只抓起来，再狠狠地摔下去，有的被撞得粉碎，有的沉入海底。马塞勒斯也不甘示弱，他用 8 艘 5 层橹船 (quinquereme)，每两艘联锁在一起，架起一种叫"萨姆布卡"(sambuca)[1]的武器，准备攻城。可是叙拉古人未等敌船靠近，就用强大的机械将巨大石块抛出，形同暴雨，打得"萨姆布卡"七零八落。同时万弩齐发，罗马兵死伤无数。吓得目瞪口呆的马塞勒斯下令退兵。在陆上，罗马兵也没有占到便宜。多次进攻，均未得逞。

有一种传说是阿基米德用巨大的火镜 (burning-mirror) 反射阳光来焚烧敌船，这大概是夸张的说法，最早见于卢西恩(Lucian) 的记载。不过当时阿基米德已经发现抛物面反射镜能够聚焦的性质。有的书说成将燃烧的火球弹射出去使敌船着火，这也许比较可信。

无论如何，罗马兵已成惊弓之鸟，简直是"风声鹤唳，草木皆兵"，只要看到一根绳子或一块木头从城里扔出来，立刻抱头鼠窜，大呼："阿基米德的机器又瞄准我们了"。

罗马人在一次军事会议上，决定夜间偷袭，他们以为飞弹只能在远距离起作用，黑夜可以避开城上的视线，一旦接近城墙，飞弹

1) sambuca 本来是一种三角竖琴 (trigon) 的别名，因此种武器形似，从而得名，大概类似云梯。波利比奥斯的书中有详细的描绘。

就无能为力了．谁知阿基米德早有防备，制造了一种叫“蝎子”的弩炮，专门对付近处的敌人．罗马兵又一次吃了大亏．

马塞勒斯嘲笑他自己的工程师和工兵说：“我们还能同这个懂几何的‘百手巨人’（Briareus）[1] 打下去吗？他轻松地稳坐在海边，把我们的船只像掷钱游戏（pitch and toss）似的抛来抛去，船队被搞得一塌糊涂，还射出那么多的飞弹，比神话里的百手妖怪还厉害”．（《马塞勒斯传》，见[7]，p. 29.）

后来罗马军放弃正面进攻，改用长期围困的策略．叙拉古终于因粮食耗尽，被叛徒出卖，公元前 212 年，在一个庆祝阿泰密斯（Artemis）神[2]的节日夜间陷落[3]，75 岁的阿基米德也光荣牺牲了．

为 国 捐 躯

叙拉古陷落时，马塞勒斯虽然发布了许多禁令，仍然阻挡不住士兵的劫掠．出于对阿基米德的敬佩，他下令不准伤害这位贤者，但阿基米德还是被愚蠢的罗马兵杀害了．关于他的死，几种记载颇有出入．

（一）最早的说法出自李维．在兵荒马乱之中，侵略军大肆杀戮，阿基米德正在沙上画图，一个罗马兵将他刺死，根本不知道他是谁．

这里所说的“沙”，是指沙盘（sand board）．在平板上铺上细沙，用来计算、画图和写字．也就是“算盘”（abacus）．李维的原文是 pulvis（拉丁文，沙盘或沙上铺的细沙），后来罗马历史学家瓦勒里乌斯（Valerius Maximus，活跃于公元 20 年前后）提到这件事，误以为是在沙地上画图，把 pulvis 写成 terra（土地），于是许

1）神话中的巨人，有 50 个头，100 只手．

2）希腊神话中月亮和狩猎女神．

3）根据狄奥多罗斯（Diodorus Siculus，公元前 1 世纪，希腊历史学家，著《历史丛书》40 卷）及卡修斯（Dion Cassius，约 150—235，罗马政治家，著《罗马纪》）的记载．

多书就以讹传讹。

许多数学史书都转载一幅镶嵌的图案画(例如见[11],p.135),表现了阿基米德之死。它是在意大利赫库兰尼姆(Herculaneum)发现的,原为波拿巴(Jérôme Bonaparte. 1784—1860)[1]的传家宝,后为威斯巴登(Wiesbaden)的F. E. 沙贝尔(Schabell)所有,1924年由F. 温特尔(Winter)将它发表出来。一般认为这件工艺品是艺术家根据古代一幅画来制作的。画面是一位老人,坐在小桌子后面,两手似在护着放在桌上的长方形沙盘,横眉冷对站在旁边的握剑士兵,他显然是命令老人跟他走。较多的学者认为它较真实地重现了当时的情景。(见[3],p.32.)

(二)策策斯的记载是,他俯身去画一些机械图,一个罗马人走过来拖他去当俘虏。阿基米德全神贯注在作图,没有注意是谁,口中说:"喂!站远一点,离开我的图."那人继续拽他,他转过头来,看清是一个罗马兵时,立即喊道:"给我一样器械(指他发明的武器)!"士兵吓了一跳,马上杀了他,虚弱的老人就这样倒下了.

(三)普卢塔克还给出下面几种说法。阿基米德独自聚精会神去思考要解决的问题,目不转睛地看他的图,丝毫没有注意到城池已破。一个罗马兵突然出现在他的面前,命令他到马塞勒斯那里去,遭到阿基米德的严词拒绝,他表示除非解答了问题并给出了证明,否则是不会去的。这激怒了罗马兵,于是丧生在刀剑之下.

(四)另一种说法是罗马兵不由分说,要立刻刺死他,阿基米德看了他一眼,请求他等一会儿,不要让一道只研究了一半而尚未解决的问题遗留给后人。但是士兵不懂这些,终于动了手.

(五)还有一种说法是阿基米德带了许多数学仪器去见马塞勒斯,如日晷、球以及测量太阳的工具等,那些士兵不知这些闪闪发光的东西是什么宝物,于是便谋财害命.

不管具体的情节如何,这位旷世的大科学家,为了拯救自己的祖国,曾竭尽心智,力挽狂澜,给侵略者以沉重的打击,最后献出生

---

1) 拿破仑一世的幼弟.

命，这是无可怀疑的事实。

阿基米德之死，马塞勒斯甚为悲痛，除严肃处理这个士兵外，还寻找阿基米德的亲属，给予抚恤并表示敬意，又给阿基米德立墓，聊表景仰之忱。在碑上刻着球内切于圆柱的图形，以资纪念。因阿基米德发现球的体积及表面积，都是外切圆柱体体积及表面积的 2/3。他生前曾流露过要刻此图形在墓上的愿望。

后来事过境迁，叙拉古人竟不知珍惜这非凡的纪念物。100多年之后(公元前 75 年)，罗马著名的政治家和作家西塞罗（Marcus Tullius Cicero, 公元前 106—前 43 年)在西西里担任财务官，有心去凭吊这座伟人的墓。然而当地居民竟否认它的存在。众人借助镰刀辟开小径，发现一座高出杂树不多的小圆柱，上面刻着的球和圆柱图案赫然在目，这久已被遗忘的寂寂孤坟终于被找到了。墓志铭仍依稀可见，大约有一半已被风雨腐蚀。又两千年过去了，随着时光的流逝，这座墓也消失得无影无踪。现在有一个人工凿砌的石窟，宽约十余米，内壁长满青苔，被说成是阿基米德之墓，但却无任何能证明其真实性的标志，而且“发现真正墓地”的消息时有所闻，令人难辨真伪。[1]

主 要 著 作

阿基米德留下的数学著作不下 10 种，多数为希腊文手稿，也有的是 13 世纪以后从希腊文译成拉丁文的手稿。有 J. L. 海伯格（Heiberg）校订的：Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii（《阿基米德全集，包括欧托基奥斯（Eutocius of Ascalan，约生于公元 480 年)的注释》，1910—1915，莱比锡出版)，这是标准的本子；译成现代语的常见的有三种：T. L. 希思(Heath)英译注释本：The works of Archimedes with the method of Archimedes（《阿基米德全集，包括阿基米德方法》，1912，纽约出

1）穆方顺，阿基米德墓地寻访记，«光明日报» 1985 年 8 月 15 日。

版); P. V. 埃克 (Eecke) 法译本: Les oeuvres complètes d'Archimède(《阿基米德全集》,1921,巴黎出版);E. J. 迪克斯特惠斯 (Dijksterhuis): Archimedes [《阿基米德全集》,原文为荷兰语,1938—1944, C. 迪克舒恩 (Dikshoorn) 英译本,1956, 哥本哈根出版]。

著作的体例,深受欧几里得《几何原本》的影响,先设立若干定义和假设,再依次证明各个命题. 各篇独立成章,虽然不象《原本》那样浑然一体,但所言均有根据,论证也是严格的. 现按海伯格本的顺序(为希思本所沿用)列举如下:

1.《论球与圆柱》(On the sphere and cylinder);

2.《圆的度量》(Measurement of a circle);

3.《劈锥曲面与回转椭圆体》(On conoids and spheroids);

4.《论螺线》(On spirals);

5.《平面图形的平衡或其重心》(On the equilibrium of planes or the centres of gravity of planes);

6.《数沙器》(The sand-reckoner);

7.《抛物线图形求积法》(Quadrature of the parabola);

8.《论浮体》(On floating bodies);

9.《引理集》(Book of lemmas);

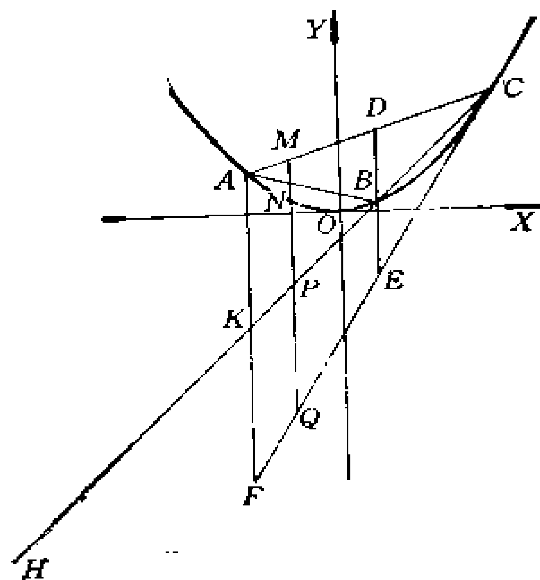
10.《群牛问题》(The cattle-problem).

以上并不是写作先后的顺序, 如按时间来排, 大致是: 5(卷1),7,5(卷2),1,4,3,8,2,6. 另外, 在本世纪初还发现阿基米德的一封信,这信非常重要,它记录了阿基米德研究问题的独特思考方法, 后来以《阿基米德方法》(The method of Archimedes, 简称《方法》)的标题发表出来.

《方法》的发现及其内容

1906年,哥本哈根大学古典哲学教授 J. L. 海伯格(Heiberg, 1854—1928) 在土耳其君士坦丁堡(现称伊斯坦布尔)仔细观看

一部擦去旧字写上新字的羊皮纸书[1]，旧的字迹幸好没有擦干净，可以判定是10世纪时写上去的.擦掉之后,大约在13世纪时写上一大堆东正教的祈祷文和礼拜仪式，作为中世纪的宗教文献保存了下来.旧的字迹隐约可辨,海伯格惊喜地发现这是阿基米德的著作,因为在别处见过. 于是用摄影等技术使旧字迹重现，1908年再一次去进行工作,经过不懈的努力，终于使185页的文字(除少数完全看不清者外)重见天日. 其中包括《论球与圆柱》及《圆的度量》、《平面图形的平衡或其重心》的一部分. 还有《论浮体》的相当一部分,过去一直认为希腊文本已失传,只有莫贝克（William of Moerbeke，约1230—1286)的拉丁文译本存下来，现在居然得到希腊文原本，虽然也还不是全部. 更令人兴奋的是有一封阿基米德写给埃拉托塞尼（Eratosthenes）的信,还是初次看到. 这是本世纪数学史料的重大发现.



《方法》包括15个命题.一开头是写给埃拉托塞尼的信用来说明本篇的主要内容，相当于序言. 下面，以命题1为例，阐明阿基米德的思想方法.为了便于了解，暂用现代的术语和符号来推导.

设D是抛物线弧 ABC 的弦 AC 的中点,过D作直线平行于抛物线的轴 OY，交抛物线于 B.要证明的是抛物弓形 $ABCD$ 的面积等于$\triangle ABC$面积的 $4/3$.

当时已经知道过B的切线平行于 AC,即B是弓形的顶点(在ABC 弧上与 AC 距离最远的点). 命题结论的另一种说法是:

1）这种用羊皮做的书写材料,可多次使用.

抛物弓形的面积，是等底等高的三角形的 4/3。

用解析几何来分析，设抛物线方程是

$$y = ax^2 \tag{1}$$

A, C 的横坐标分别是 x_1, x_2，则 AC 的方程是

$$y = ax_1x + ax_2x - ax_1x_2 \tag{2}$$

过 C 点的切线 CF 的方程是

$$y = 2ax_2x - ax_2^2 \tag{3}$$

延长 DB 交 CF 于 E，不难证明，B 是 ED 的中点。事实上，将 D, B, E 的横坐标 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 分别代入(2)，(1)，(3) 式，可得到三者的纵坐标，依次是

$$y_D = \frac{a(x_1^2 + x_2^2)}{2}, \quad y_B = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \quad y_E = ax_1x_2,$$

由此知 B 是 D、E 中点。

作 $AF \parallel OY$，交 CF 于 F。延长 CB 交 AF 于 K，则 K 是 FA 的中点。再取 $KH = KC$，过 AC 上任意点 M 作 $MQ \parallel OY$，交 CK 于 P，交 CF 于 Q，交抛物线于 N。将 M 的横坐标 x_0 分别代入(2)、(1)、(3)得到 M, N, Q 的纵坐标

$$y_M = ax_1x_0 + ax_2x_0 - ax_1x_2,$$
$$y_N = ax_0^2, \quad y_Q = 2ax_2x_0 - ax_2^2,$$

于是有

$$\frac{MQ}{MN} = \frac{y_M - y_Q}{y_M - y_N} = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{AC}{AM}$$
$$= \frac{KC}{KP} = \frac{HK}{KP}.$$

上面推出的几个性质，有的前人已证明，有的阿基米德在别处已证明，在这里是作为已知条件来使用的。例如：1)过 D 且平行于轴的直线必过弓形的顶点 B，且 B 是 ED 中点，在欧几里得以及阿里斯泰奥斯(Aristaeus，约公元前 340 年)的圆锥曲线论中已证明，

在阿基米德的《抛物线图形求积法》命题1，2中也讨论过；2) $MQ:MN=AC:AM$ 是同一篇论文的命题5。

下面才是阿基米德巧妙的根据力学原理去探索真理的方法。

假想各线段都是有重量的，而且重量和长度成正比。又 HP 是一根以K为支点的杠杆。因为 $MQ:MN=HK:KP$，如果将 MN 放在H点，就可以和位于杠杆另一端的 MQ 平衡，P是 MQ 的重心。这关系对于任意的M都成立。弓形可以看作由许多这样的 MN 线段所组成，而 $\triangle AFC$ 由许多的 MQ 线段所组成。如果将所有的 MN（也就是整个弓形）都放在H上（以H为重心），就可以和 $\triangle AFC$ 平衡。弓形的重量可以看作完全集中在H点，而 $\triangle AFC$ 的重量也可以看作集中在它的重心上，这重心位于中线 KC 上，与K的距离是 $KC(=KH)$ 的 $1/3$，故弓形重量(即面积)是 $\triangle AFC$ 重量(即面积)的$1/3$。又 $\triangle AFC=4\triangle ABC$[1]，故知弓形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的$4/3$。

阿基米德特别声明以上的推导不能算是证明，只是一种直观的试探或猜测问题结论的方法．以后还要在别的地方用几何方法(通常是用归谬法)去严格证明它。

《方法》的中心思想，是要计算一个未知量(图形的面积、体积等)，先将它分成许许多多的微小量(如将面分成线段，将体积分成薄片等)，再用另一组微小量来和它比较。通常是建立一个杠杆，找一个合适的支点，使前后两组微小量取得平衡。再将后一组微小量集合起来，它的总体应该是较易计算的。于是通过比较，即可求出未知量来。这实质上就是积分法的基本思想。阿基米德的睿智，业已伸展到17世纪中叶的无穷小分析领域里去了！因此，称他为近代积分学的先驱，毫不为过。当然，和积分法还有相当大的差距。表现在：1）没有说明微小量(或元素)是有限的还是无穷多，这在古希腊时代是不可能解决的问题；2）没有极限的思想，现代的积分，是一个极限值而不是一个简单的和；3）就事论事，没有

1）这两个三角形同底，$AF=2DE=4DB$，因此高也是4倍。

形成抽象的概念及一般的法则。

尽管如此，阿基米德运用这种富有启发性的方法，获得大量的辉煌成果，为后人开辟了一个广阔的领域。本篇后面的命题都是用类似的方法取得的。

命题 2. 球体积是以此球的大圆为底、以球的半径为高的锥体体积的 4 倍. 以球的大圆为底、球的直径为高的圆柱的体积是球体积的 3/2 倍。

这在《论球与圆柱》中是命题 34 及其推论。也就是刻在墓碑上的那个著名的论断。

此外还有旋转椭圆体体积，旋转抛物线体体积及重心，半球的重心，以及相当复杂的圆锥体与球的交截体(两种立体相交的公共部分)等问题。在今天，只有用积分法才能解决，而阿基米德独辟蹊径，创立新法，取得正确的结果，使后人惊叹不已。

各篇著作的主要内容

(一)《论球与圆柱》

这是他的得意杰作，包括许多重大成就。序言是阿基米德给多西修斯（Dositheus）的信，后者是科农的学生和朋友。阿基米德的著作，过去一向是通过科农转给亚历山大的学者的。科农去世后，改由多西修斯代办。在《抛物线图形求积法》的序言中，阿基米德已经说明了这一点："惊悉科农去世，我十分悲痛，这不仅仅因为失去一位好友，而且失去一位令人钦佩的数学家。你是他的朋友，而且精通几何，转交论文的任务，现在请你代劳"。以后好几篇著作都是先寄给多西修斯的。

在《论球与圆柱》的序言中，首先指出本篇的主要内容和成就，接着给出 6 个定义。阿基米德在这里将"定义"说成"公理"。按其性质来说应该是定义，后来欧托基奥斯在注中说明这一点。

下面给 5 个假定，相当于公理。例如

1. 在端点相同的所有线(包括曲线、直线)中，以直线为最短。

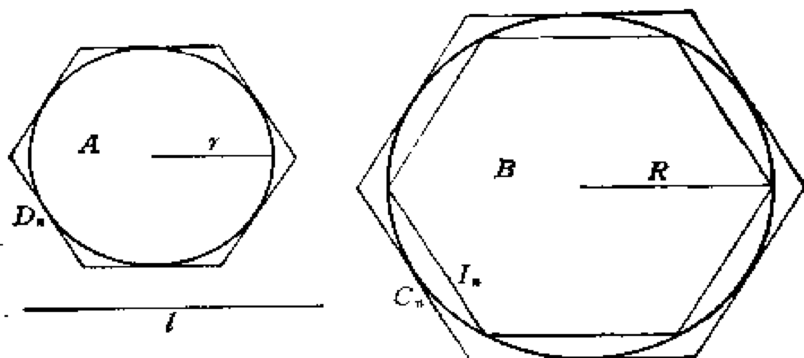
2. 在以相同的平面曲线为边界的曲面中，以平面的面积为最小。

特别重要的第 5 个公理，这就是后来以阿基米德的名字命名的公理：如果两条线段或两个面、两个立体不相等，就可以在两者之差的上面，加上它的本身，一次一次加上去，使得每一个预先给定的同类量都被超过。在现代分析学中常用的说法是：对于任意二正实数 a,b，必存在自然数 n，使得 $na > b$。

从这些定义和公理出发，推导出上卷 44 个，下卷 9 个命题。多次使用阿基米德公理及反证法(归谬法)，如要证 $A = B$，则证明 $A > B$ 及 $A < B$ 均导致矛盾。以下面的命题为例来说明。

阿基米德引用了欧几里得《几何原本》XII，2 的证法（穷竭法)建立了命题 6：只要边数足够多，圆外切正多边形的面积 C 与内接正多边形的面积 I 之差可以任意小[1)]。不同之处是欧几里得默认了阿基米德公理，而阿基米德在本篇中是明确地作为公理提出来的。在这基础上，证明了：

命题 14. 正圆锥体的侧面积等于以底面半径与母线的比例中项为半径的圆的面积。



设正圆锥的底面为 A，半径为 r，母线为 l，r 与 l 的比例中项为 R（即 $R^2 = rl$)，则此正圆锥的侧面积 $S = \pi R^2$。

以 R 为半径作圆 B，其面积为 πR^2，现要证明 $S = B = \pi R^2$。

---

1) 换一种说法是 C/I 可以与 1 任意接近，或 C/I 可以小于任何大于 1 的值.

用反证法，设 $S > B$. 根据命题 6，可作 B 的外切正多边形 C_n（同时表示其面积，下同）与内接正边形 I_n，使得

$$\frac{C_n}{I_n} < \frac{S}{B},$$

又作底面 A 的相同边数的外切正多边形 D_n，其周长记作 P_n. 以 D_n 为底，以圆锥的顶点为顶点的正棱锥的侧面积 $L_n = \frac{1}{2}lP_n$，而 $D_n = \frac{1}{2}rP_n$. D_n, C_n 是相似的，其比等于对应线段平方之比，

$$\frac{D_n}{C_n} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{l} = \frac{\frac{1}{2}rP_n}{\frac{1}{2}lP_n} = \frac{D_n}{L_n},$$

由此知 $C_n = L_n$，代入上面的不等式有

$$\frac{C_n}{I_n} = \frac{L_n}{I_n} < \frac{S}{B},$$

这是不合理的，因为圆锥侧面积 S 小于其外切棱锥侧面积 L_n，而圆 B 大于其内接多边形面积 I_n. 同理可证 $S < B$ 也是不合理的，故 $S = B = \pi R^2$. 现在常用的形式是 $S = \pi rl$.

下面较著名的命题还有

命题 33. 球面积等于它的大圆面积的 4 倍.

命题 34. 球体积等于以它的大圆为底、它的半径为高的圆锥体积的 4 倍. 推论：以球的大圆为底、球直径为高的圆柱的体积与表面积分别是球的体积与表面积的 3/2. 这命题在《方法》中已提出，此处用反证法加以证明.

命题 35—44 研究了球缺、球冠及球心角体（球扇形）的表面积及体积.

下卷 9 个命题主要讨论球缺，好几个是作图题. 命题 2 给出球缺的体积. 命题 4 在历史上占有特殊的地位. 它要求用平面将一个球截成两部分，使这两部分体积之比等于给定的比.

设球半径为 r，所分成的两个球缺的高各为 h 及 $2r-h$，公共底的半径为 a，则体积分别是 $V_1=\frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$ 及 $V_2=\frac{\pi}{3}(2r-h)^2(r+h)$，给定的比是 $\frac{m}{n}$，展开 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{n}$ 并化简，得到

$$h^3-3rh^2+\frac{4m}{m+n}r^3=0,$$

可改写为

$$(2r-h)^2(r+h)=4r^3\frac{n}{m+n}.$$

记 $x=2r-h, a=3r$，又将右端的常数写成 bc^2，上式简写成 $x^2(a-x)=bc^2$。（见[9]，p. 304.）

此问题的解相当于用几何方法去解这个 3 次方程。阿基米德说他将在后面给出分析与综合的解法，但现存本未见，大概已失传。后来欧托基奥斯(5 世纪时)找到一些残页，是用多利安方言(阿基米德惯用的方言)写的手稿，上有这问题的解法，他认为是属于阿基米德的。解法的要点是求两条圆锥曲线的交点。一条是抛物线

$$x^2=\frac{c^2}{a}y,$$

另一条是双曲线 $(a-x)y=ab$。残页还讨论了方程可解的条件，这相当于求出 3 次式 $x^2(a-x)$ 的极大值。它给出当 $x=\frac{2}{3}a$ 时 3 次式取极大值 $\frac{4}{27}a^3$，$bc^2\leqslant\frac{4}{27}a^3$ 时 3 次方程有正实数解。欧托基奥斯在注释本篇时，还比较了狄俄尼索多罗 (Dionysodorus，公元前 3 世纪—公元前 2 世纪，居住在小亚细亚地区)以及狄俄克利斯 (Diocles，约公元前 190 年)对此问题的解法。

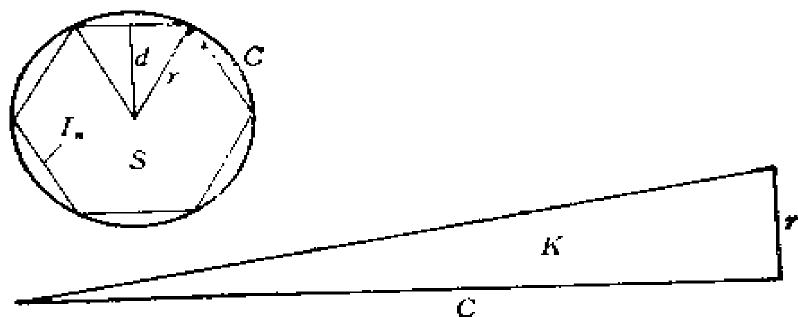
（二）《圆的度量》，其中只有 3 个命题。

命题 1. 圆的面积等于一个以其周长及半径作两个直角边的

直角三角形的面积。

更简单的说法是：圆面积等于半径乘半周长。这正是中国《九章算术》的说法："半周长半径相乘得积步"。或刘徽(公元263年)注的说法："半周乘半径为圆幂"。

但在古希腊，自从毕达哥拉斯学派发现不可公度量以后，每一条线段是否都有长度就成了问题。因此在几何学家的著作中，极力避免两条线段长相乘的说法，宁愿说成由两线段构成的矩形或三角形的面积。



证明仍用穷竭法。[1]设圆半径为 r，周长为 C，面积为 S。以 C，r 为两直角边作直角三角形，设面积为 K。现证明 $S=K$。用反证法，假定 $S>K$，作边数足够多的内接正多边形 I_n，使其面积 I_n 与圆面积 S 之差

$$S-I_n<S-K,$$

于是有

$$I_n>K.$$

这是不合理的，因为 I_n 的边心距 $d<r$，而 I_n 的周长小于 C，故 I_n 应 $<K$。同理作外切正多边形，可证 $S<K$ 也导致矛盾，从而有 $S=K$。

命题 2. 圆面积与外切正方形面积之比为 11:14。

相当于取 $\pi=\frac{22}{7}$，希思及其他注释者如迪克斯惠斯等都认为

1）参照欧几里得《原本》XII,2.

这命题应该放在命题 3 的后面，也许是后人抄错了或阿基米德别有用意。

命题 3. 圆的周长与直径之比小于 $3\frac{1}{7}$ 而大于 $3\frac{10}{71}$。

这就是有名的阿基米德圆周率的出处。欧几里得在《原本》中讨论了很多圆的性质，但却完全没有提到圆周率的值及圆面积、圆周长的计算法。阿基米德弥补了这一不足，并在科学上首次创用上、下界来确定一个量的近似值，还提供了误差的估计。

他在推导中使用了一个不等式

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780},$$

未加任何说明。如将$\sqrt{3}$展开成连分数，可知不等式左右两端都是连分数的渐近分数．它具有这样的特性，以265/153为例，在一切分母不大于 153 的分数中，它是最接近$\sqrt{3}$的．1351/780 也是一样，在所有分母不大于 780 的分数中，它是最接近$\sqrt{3}$的。也就是说它具有"最佳"的性质。阿基米德是怎样得到这些分数的？这引起后人的极大兴趣。仅从 17 世纪以来，就至少有十几种不同的推测[1]。较多的意见认为是利用了不等式

$$a\pm\frac{b}{2a\pm1}<\sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a},(a>b,a>1).$$

左右各平方，便可证其成立。试推演如下：

$$\frac{5}{3}=2-\frac{1}{3}<\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{2^2-1}<2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4},$$

1）文献[10]（p.51）中说 T.F. de 拉尼（Lagny. 1660—1734.法国人，曾计算 π 精确到 112 位小数），K.B. 莫尔韦德(Mollweide,1774—1825),H.G. 塞乌滕（Zeuthen, 1839—1920），P. 唐内里（Tannery, 1843—1904），F. 胡尔奇（Hultsch, 1864）等都作过推测。另见李俨《中算史论丛》，中国科学院，1954，第一集 p. 83.

因近似分数以分母小者为佳，故取左端不取右端。$5 < 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$，以 5 为$\sqrt{27}$的近似值，

$$5 + \frac{2}{11} < 3\sqrt{3} < \sqrt{5^2 + 2} < 5 + \frac{1}{5}.$$

取右端

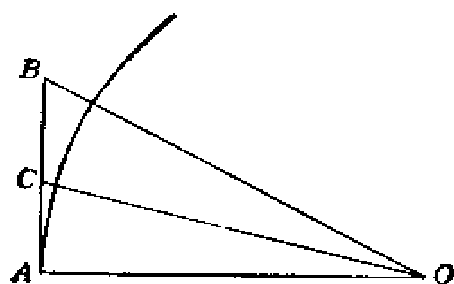
$$15\sqrt{3} = 5\sqrt{27} = \sqrt{675} < 26,$$

以 26 为 $\sqrt{675}$的近似值，

$$\frac{1325}{51} < 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2 - 1} < \frac{1351}{52}$$

于是有

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$



本命题主要的推导思想如下：设 O 是圆心，OA 是半径，作

$$\angle AOB = 30^\circ,$$

过 A 作切线 AB 交 OB 于 B，则

$$\frac{OB}{AB} = 2,$$

$$\frac{OA}{AB} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}\text{[1)]}.$$

两式左右相加得

$$\frac{OB + OA}{AB} > \frac{571}{153}.$$

作 $\angle AOB$ 的平分线 OC，则

---

1) 在阿基米德的所有著作中并没有出现 3 的平方根这样的概念（更不用说符号了），因为他不承认无理数是数．这里加入$\sqrt{3}$是为了便于了解．

$$\frac{OB}{OA}=\frac{CB}{AC},$$

左右同加1,

$$\frac{OA+OB}{OA}=\frac{AB}{AC}$$

左端分母与右端分子交换,再由前面的不等式,有

$$\frac{OA+OB}{AB}=\frac{OA}{AC}>\frac{571}{153},$$

或

$$\frac{AC}{OA}<\frac{153}{571}.$$

由上面的不等式立刻推出圆外切正6边形、正12边形的周长与直径比值的上界. 同样,计算内接正多边形的边长,可以确定比值的下界. 再利用比例关系及勾股定理,重复上述手续, 一直算到 96 边形,最后得到

$$3\frac{10}{71}<\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}<\frac{\text{内接正96边形周长}}{\text{直径}}<\frac{\text{圆周长}}{\text{直径}}$$

$$<\frac{\text{外切正96边形周长}}{\text{直径}}<\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}<3\frac{1}{7}.$$

有趣的是, 圆周率的下界 $3\frac{10}{71}=\frac{223}{71}$ 也具有“最佳”的性质,即在一切分母不大于 71 的分数中它是最接近 π 的. 比它更接近 π 的分数有 $\frac{245}{78}$, $\frac{267}{85}$, $\frac{289}{92}$, $\frac{311}{99}$, $\frac{333}{106}$,…[1] 分母都大于 71,除了最后一个外,都不是连分数的渐近分数.

(三)《劈锥曲面与回转椭圆体》

---

1) 见梁宗巨, 祖冲之密率的优越性, «辽宁师范大学学报» 增刊(数学史专辑), 1986, p.6.

共 32 个命题，研究椭圆的面积以及回转圆锥曲线体被平面截取部分的体积等。证明的方法是穷竭法，十分接近今天的积分法思想。当时还没有“抛物线”（parabola）等名称，早期的希腊数学家如门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前 4 世纪），用平面去截三种不同的直圆锥面，产生三种圆锥曲线。令平面与直圆锥的母线垂直，当圆锥的顶角（母线所张的最大角度）是直角时，截口叫做“直角圆锥截线”（section of a right-angled cone），现在叫抛物线；当顶角是锐角时，叫“锐角圆锥截线”（section of an acute-angled cone），现叫椭圆；当顶角是钝角时，叫“钝角圆锥截线”（section of an obtuse-angled cone），现叫双曲线。欧几里得和阿基米德一直沿用这些旧名称（见[10]，p.111），为简单起见，改用今名。

本篇一开头先给出两个引理，以备后面证明之用。第 1 个是等差数列求和公式，写成不等式[1]

$$2(a+2a+3a+\cdots+na)>n^2a$$
$$>2[a+2a+3a+\cdots+(n-1)a].$$

如用求和公式，左端是 $n(n+1)a$，右端是 $(n-1)na$，不等式成立是明显的。

第 2 个是自然数平方和公式，先证明

$$(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots+na)$$
$$=3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2],$$

由此可知

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2=S_na^2.$$

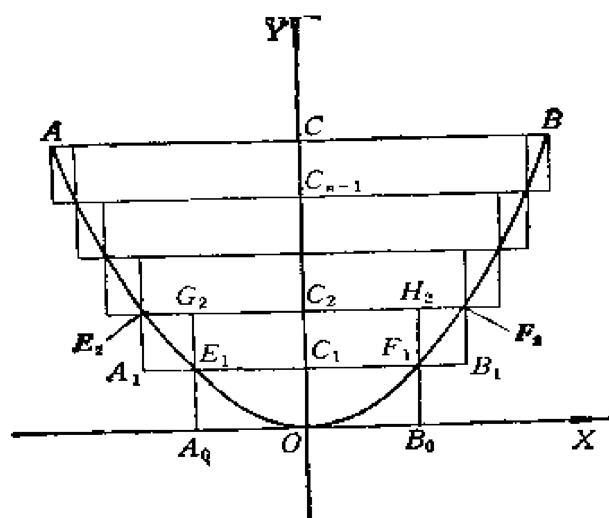
写成不等式

$$3S_{n-1}a^2<n^3a^2<3S_na^2.$$

下面以一个较简单的命题来阐明阿基米德的证题思想。为了便于理解，改用现代的术语和符号。

1）原文为几何形式。

命题 21. 回转抛物体被垂直于轴的平面所截取的部分的体积等于同底等高的圆锥体的 3/2。



抛物线 AOB（不妨设方程为 $y=x^2$）绕其轴 OC 回转，产生回转抛物体。求被垂直于 OC 的平面 ACB 所截取的部分的体积 V。将 OC 用分点 $O, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}, C_n(=C)$ 分成 n 等分，过这些分点作垂直于 OC 的平面将所求的体积分成 n 个小薄片。每一个小薄片介于一个内接圆柱与一个外接圆柱之间。例如▭E_1H_2 及▭A_1F_2 回转后就产生 C_1, C_2 间的小薄片的内接与外接圆柱。又每一个外接圆柱与紧接着上面的一个内接圆柱（如▭A_0F_1 与▭E_1H_2 回转产生的圆柱）相等。

设 $OC=h$，则小薄片厚 $d=\frac{h}{n}$，各层外接圆柱的底面半径记作 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，而 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2, \cdots, y_n=x_n^2$ 是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的纵坐标。设外接圆柱体积的总和是 S_n，内接圆柱体积的总和是 I_n，则 $S_n=d(\pi x_1^2+\pi x_2^2+\cdots+\pi x_n^2)=\pi d(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\pi d(d+2d+\cdots+nd)>\pi d\cdot\frac{n^2}{2}d=\frac{\pi}{2}h^2=V^*>\pi d[d+2d+\cdots+(n-1)d]=I_n$。这是根据前面引理得出的不等式。现证明 $V=V^*$，否则，如 $V>V^*$，则因外接圆柱的总体与内接圆柱的总体只差一个小圆柱 $\pi nd^2=\frac{\pi h^2}{n}$，只要 n 足够大，它可任意小，即可使

$$S_n-I_n<V-V^*,$$

这是不合理的，因 $S_n > V$ 而 $I_n < V^*$. 同理可证 $V < V^*$ 也导致矛盾，故 $V = V^* = \frac{\pi}{2}h^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 h, a = x_n$ 是底半径 CB. 而同底等高圆锥体体积是 $\frac{1}{3}\pi a^2 h$，故 V 是它的 3/2.

其余各命题虽然都比这复杂，但基本思路是差不多的. 除了没有取极限这一步骤之外，基本思想和现代积分是一致的.

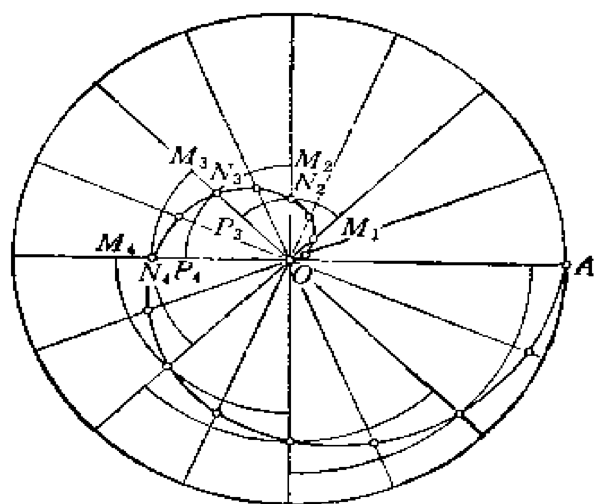
（四）《论螺线》

共 28 个命题，前 10 个是关于圆及切线的各种比例关系的. 命题 11 重新证明了自然数平方和的不等式，这在《劈锥曲面与回转椭圆体》中是作为引理提出的：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

$$> 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2.$$

接着给出螺线（现在称为"阿基米德螺线"）的定义.



一条射线绕其固定端点匀速旋转，同时有一动点从端点出发沿射线匀速运动，那么这动点就描绘出一条平面螺线 (spiral). 射线开始时的位置叫做始线 (OA)，固定端点叫做原点 (O). 旋转一圈所产生的螺线与始线所包围的面积叫做"第 1 面积" (first area).

现在在解析几何中螺线的极坐标方程是 $r = a\theta$，旋转一圈后动点到达 A 点，$OA = 2\pi a$，以 OA 为半径的圆叫做"第 1 圆".

命题 21 以后的几个命题探讨螺线所围的面积，命题 24 证明了"第 1 面积" S 等于"第 1 圆"面积的 1/3，即

$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

将圆周角 2π 分为 n 等分，每一等分为 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$，在每一等分内作螺线的内接与外接扇形。例如第 3 等分的内接扇形是 ON_2P_3，外接扇形是 OM_2N_3。设全部外接扇形面积的总和是 C_n，内接扇形面积的总和是 I_n，则 $C_n > S > I_n$。又根据自然数平方和的不等式，并注意到弓形面积公式 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$[1]，有

$$C_n = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) > \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = S^*$$

$$> \frac{4a^2\pi^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] = I_n.$$

C_n 与 I_n 仅差最后一项 $\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot n^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n}$，只要 n 足够大，$C_n - I_n$ 可以任意小。

应用前面多次用过的反证法，可证 $S = S^*$。否则，如 $S > S^*$，则可使

$$C_n - I_n < S - S^*,$$

这是不合理的，因外接扇形面积总和$>S$，而 $I_n < S^*$。同样 $S < S^*$ 也是不合理的。于是得到

$$S = \frac{4}{3}a^2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

命题 13—20 研究了螺线的切线，给出作图方法及种种性质。没有发现阿基米德有微分法的思想(那怕是粗浅的)，那么他是怎样得到切线的作法的？这有趣而且带有关键性的问题引起后人的注意。有些学者认为是运用了运动学的原理。射线作匀角速运

1) 例如第 3 个外接扇形的面积 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}\overline{ON}_3^2\Delta\theta$，而 $ON_3 = a\cdot 3\Delta\theta = a\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{n}$，故 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}\left(a\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{n}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot 3^2$。

动，而动点在射线上作匀速运动，两个速度按平行四边形法则所得到的合速度方向就是切线方向[1]. 如果这推测正确的话，那么这就是古代属于微分法的罕见的例子.

（五）《平面图形的平衡或其重心》

分两卷，卷 1 先给出 7 个公理，都是显而易见之理. 例如

1. 等重的物体放在相等的距离上（各在杠杆一端，与支点等距），则处于平衡状态；等重的物体放在不相等的距离上则不平衡，向距离远的一端倾斜.

2. 放在一定距离上的重物处于平衡状态时，若在其中的一个重物上加一点重量，则失去平衡，要向加重量的一端倾斜.

5. 相似图形的重心，也处在相似的位置上.

从这些公理出发，导出了著名的杠杆定律：

命题 6, 7. 若两重物平衡，则所处的距离（与支点的距离）与重量成反比.

证明是分可公度量与不可公度量两种情形来讨论的. 下面的 8 个命题找出平行四边形、三角形以及梯形的重心.

卷 2 的 10 个命题集中研究了抛物弓形和它的一部分的重心. 方法是作一系列的内接三角形，逐步去逼近所讨论的图形.

（六）《数沙器》[2]

这是阿基米德遗留下来的唯一的算术著作，也可能是最后的一种. 那时海厄罗王已去世（公元前 216 年），他的儿子吉伦（Gelon）继承王位，阿基米德也已年逾古稀. 这篇文章是递交给吉伦王的.

文章首先表明写作的目的，是要纠正有些人的错误观点，他们认为世界上的沙子是无穷的，即使不是无穷，也没有一个可以写出来的数超过沙子的数. 阿基米德指出，任何大的数都可以表示出来.

全文只有一个定理，实际相当于现今的指数法则

1）见[10]，p.557；[13]，p.58，中译本 p.63；[14]，p.55，中译本 p. 74.

2）也可译作"数沙者"，"沙子计算器"，或意译为"数沙术".

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}.$$

他先给出地球、月球、太阳大小的估计，进而计算沙粒的数目。

1. 地球的周长不大于 3×10^6 个“斯达地”(stadium，复数 stadia)。斯达地是古希腊长度单位，约合 $606\frac{3}{4}$ 英尺，或 185 米．依此计算，地球的周长是 5.55×10^5 公里，而实际是 40000 公里。

2. 地球直径大于月球直径，太阳直径大于地球直径．

3. 太阳直径是月球直径的 30 倍．（实际是 400 倍）

这些估计数字和实际出入很大，不过他自己也说只是一种假定。接着推出

“宇宙”(相当于太阳系)直径 $<10^{10}$ 斯达地．

当时希腊用字母表示数字，最大的单位是“万”(10000，myriad)，用希腊字母 M（μ 的大写）表示，如 $\overset{\beta}{M}$ 表示 20000，β 表示 2，下面的 M 表示加大 10000 倍。

阿基米德以万为基础，建立新的记数法，使得任何大的数都能表示出来。

从 1 起到 1 亿(原文是万万，myriad myriads，按中文的习惯改称为亿)叫做第 1 级 (first order) 数；以亿(10^8)为第 2 级数的单位，从亿(10^8)到亿亿 $(10^8)^2$ 叫第 2 级数；再以亿亿 $(10^8)^2$ 为单位，直到亿亿亿 $(10^8)^3$ 叫第 3 级数；照此类推，直到第 1 亿级数的最后一数亿^{亿}$(10^8)^{10^8}$。

原文全用语言来叙述，没有创设记数符号，他是否在别的地方使用了符号不得而知。为了叙述简明，这里用 P 表示亿^{亿}$(10^8)^{10^8}$．从 1 到 P 叫做第 1 周期 (first period)。下面列成表：

第 1 周期

第 1 级　　从 1 到 10^8

第 2 级　　从 10^8 到 $(10^8)^2$

⋮　　　　　⋮

第 10^8 级　　从 $(10^8)^{10^8-1}$ 到 $(10^8)^{10^8}$（记作 P）。

第 2 周期

　第 1 级　　从 P 到 $P\cdot 10^8$

　第 2 级　　从 $P\cdot 10^8$ 到 $P\cdot(10^8)^2$

　　⋮　　　　　　⋮

　第 10^8 级　　从 $P\cdot(10^8)^{10^8-1}$ 到 $P\cdot(10^8)^{10^8}=P^2$.

　　⋮　　　　　　⋮

第 10^8 周期

　第 1 级　　从 P^{10^8-1} 到 $P^{10^8-1}\cdot 10^8$

　第 2 级　　从 $P^{10^8-1}\cdot 10^8$ 到 $P^{10^8-1}\cdot(10^8)^2$

　　⋮　　　　　　⋮

　第 10^8 级　　从 $P^{10^8-1}\cdot(10^8)^{10^8-1}$ 到 $P^{10^8-1}\cdot(10^8)^{10^8}=P^{10^8}$.

最后这个数 $P^{10^8}=[(10^8)^{10^8}]^{10^8}=10^{8\cdot 10^{16}}$ 的确相当大，有 8 亿亿+1 位.

阿基米德算出充满宇宙的沙数不过是 10^{51}，即使扩充到"恒星宇宙"，即以太阳到恒星的距离[1]为半径的大球，也只能容纳 10^{63} 个沙粒，远远小于前面列出的大数.

现今从理论上推测，可观察到的宇宙半径约为 130 亿光年，假想整个充满了具有最小可能体积的粒子(如质子)，其数也不超过 10^{125}.[2] 也还不能和上述的大数相比.

阿基米德的记数方法还可以继续下去，他企图说明任何大的数都可以表示出来，现在目的业已达到. 可惜他没有再进一步去改革整个的希腊记数制度. 也许那时已进行或临近叙拉古保卫战，致使改革工作功亏一篑.

(七)《抛物线图形求积法》

在《方法》中，阿基米德利用力学原理，已经得到"抛物弓形面积是同底等高的三角形的 4/3"的结论. 但他认为这不算证明，在本篇中另外用完全不同于力学的几何方法去严格证明它. 基本思

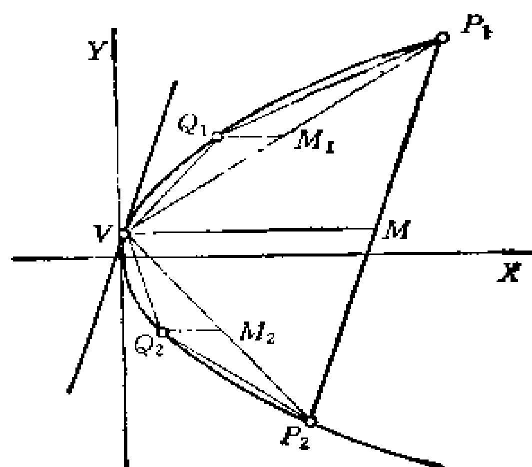
---

1) 根据希腊天文学家阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos, 约公元前 310—前 230，最早提出日心说)的估计.

2) I. Asimov, Asimov on Numbers, Doubleday & Co., 1977 (中译本,《数的趣谈》,上海科技出版社,1980, p.221).

想是穷竭法，作一系列的内接三角形去穷竭(逼近)弓形，最后用归谬法完成证明。

全篇 24 个命题，最后一个命题才是所要的结论，前面的都可以看作是引理。为了避免叙述的冗长，下面用解析几何来说明。



设抛物线方程为

$$y^2 = 2x$$

在抛物线上任取两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，不妨设 $y_1 > y_2$。过 P_1P_2 中点M作 $MV \parallel$ 抛物线的轴 OX，交抛物线于 V，V 是抛物弓形 P_1VP_2 的顶点，即过 V 的切线 $\parallel$ 于 P_1P_2，$\triangle P_1VP_2$ 与弓形同底等高(命题 1与 18 已证)。现要证明弓形面积 S 是 $\triangle P_1VP_2$ 面积的 4/3。

将 P_1，V，P_2 三点的坐标写成 $P_1\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$，$V\left[\frac{(y_1+y_2)^2}{8}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$，$P_2\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right)$，代入三角形面积公式，化简后得 $\triangle P_1VP_2 = \frac{1}{16}(y_1 - y_2)^3$。

过 VP_1 中点 M_1 作 $M_1Q_1 \parallel OX$ 交抛物线于 Q_1，过 P_2V 中点 M_2 作 M_2Q_2 交抛物线于 Q_2。注意到V的纵坐标是 $\frac{y_1+y_2}{2}$，可知

$$\triangle P_1Q_1V = \frac{1}{16}\left(y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}(y_1 - y_2)^3,$$

又 $\triangle P_2VQ_2 = \triangle P_1Q_1V$， 两者之和 $= \frac{1}{4}\triangle P_1VP_2$。

称 $\triangle P_1VP_2$ 为 1 级三角形，面积记作 Δ_1，$\triangle P_1Q_1V$ 及 $\triangle P_2VQ_2$ 称为 2 级三角形，面积总和记作 Δ_2，$\Delta_2 = \frac{1}{4}\Delta_1$。同理可在 P_1Q_1，Q_1V，VQ_2，Q_2P_2 之上作 4 个 3 级三角形，其面积总和为 Δ_3，同样可证

$$\Delta_3 = \frac{1}{4}\Delta_2 = \frac{1}{4^2}\Delta_1.$$

这手续可以继续下去，直到作出 n 级三角形，其面积的总和 $\Delta_n = \frac{1}{4^{n-1}}\Delta_1$。全部三角形的总和

$$\begin{aligned}
I_n &= \Delta_1 + \frac{1}{4}\Delta_1 + \frac{1}{4^2}\Delta_1 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\Delta_1 \\
&= \Delta_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \Delta_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \Delta_1\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \frac{4}{3}\Delta_1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^{n-1}}\Delta_1 \\
&= \frac{4}{3}\Delta_1 - \frac{1}{3}\Delta_n.
\end{aligned}$$

由此知

$$I_n < \frac{4}{3}\Delta_1,$$

又

$$\frac{4}{3}\Delta_1 - I_n = \frac{1}{3}\Delta_n.$$

前面的命题已证明，内接三角形的级数越多，I_n 越大，$S-I_n$ 越小，同时 Δ_n 也越小，以至小于任给的正数。

现在要证明 $S=\frac{4}{3}\Delta_1$. 假设等式不成立。

1. 若 $S>\frac{4}{3}\Delta_1$，则只要内接三角形作得足够多，可使

$$S-I_n<S-\frac{4}{3}\Delta_1,$$

或

$$I_n>\frac{4}{3}\Delta_1,$$

这与前面的不等式矛盾。

2. 若 $S<\frac{4}{3}\Delta_1$，则可使 $\frac{1}{3}\Delta_n=\frac{4}{3}\Delta_1-I_n<\frac{4}{3}\Delta_1-S$，由此推出

$$I_n>S$$

这也是不合理的，因 I_n 是内接三角形面积之和，应有 $I_n<S$. 综上所述，可知 $S=\frac{4}{3}\Delta_1$，即抛物弓形面积等于同底等高的三角形的 4/3.

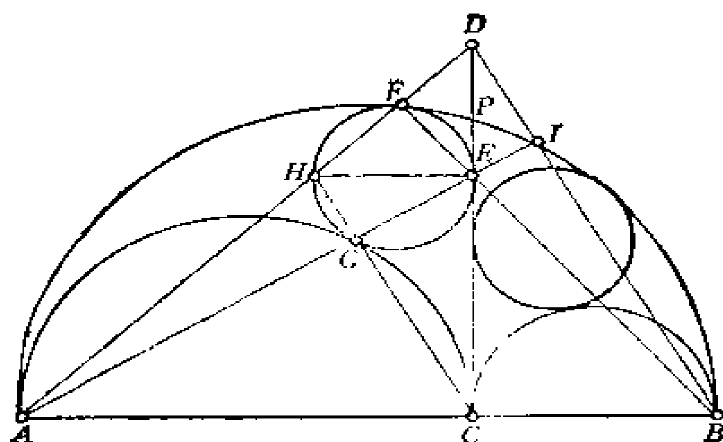
（八）《论浮体》

这是古代第一部流体静力学著作，阿基米德因此而被尊为流体静力学的创始人。20 世纪之前，本书只有莫贝克 13 世纪时的拉丁文译本，1906 年，海伯格发现了羊皮纸上的希腊原文，但不完全。现传的本子是两种文字参照编成的。

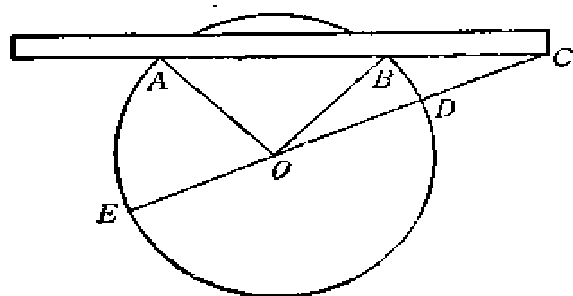
卷上命题 7 给出著名的“阿基米德原理”： 重于流体的固体，放在流体中，所减轻的重量等于排去流体的重量。这原理因和他解决王冠问题联系起来而脍炙人口。

卷下的 10 个命题相当详细地讨论了正回旋抛物体在流体中的稳定性，研究了不同的高与底的比、具有不同的比重及在流体中处于不同位置时这种立体的性态。在推理中运用了高度的计算技巧。

（九）《引理集》



只有阿拉伯文译本传下来，是 15 个初等几何的问题集。也许不是阿基米德的原著而是后人收集整理的，因为在文章中不止一次提到阿基米德的名字。其中提出一种被称为“皮匠刀”（shoemaker's knife）的图形，是三个半圆所包围的部分，两个小半圆外切，又同时内切于大半圆。这图形有许多奇妙的性质，如通过两小圆的外切点 C，作 $CP\perp$ 大圆直径 AB（三个圆的直径是重合的）交大圆于 P，则“皮匠刀” $AGCBPA$ 的面积等于以 CP 为直径的圆面积。又可以作两个小圆，分别切于 CP、大圆及一个小圆，可证这两个小圆相等。设 HE 是 $\parallel$ 于 AB 的一个小圆的直径，则切点 F 与 H，A 共线，F 与 E，B 也共线。E 是 $\triangle ABD$ 的垂心，从 A 向 DB 作垂线，垂足 I 必落在大圆周上。又 AE，HC 必过切点 G，等等。还有许多其他的性质。



命题 8 和 3 等分角问题有关. 设 AB 是$\odot O$的任一弦，延长 AB 至C使 BC 等于圆的半径. 联 CO 并延长之使交圆于 E，D。求证

$$\overset{\frown}{AE} = 3\overset{\frown}{BD}.$$

联 OA，OB，只要证明 $\angle AOE = 3\angle BOD$ 即可. 实际上 $\angle AOE = \angle OAC + \angle OCA = \angle OBA + \angle OCA = \angle BOC + 2\angle OCA = 3\angle BOD$.

现将问题倒过来考虑. 设有 $\angle AOE$，求它的三等分角. 这就是古希腊的三大作图问题之一的"三等分任意角"问题. 从理论上说用直尺和圆规是不可能解决的. 受到本命题的启发，只要在直尺上加一个点，就能轻而易举地解决这历史难题.

在直尺 ABC 上记上一个点 B，使 B 至尺端 C 的距离等于半径。现令尺通过 A 点，B 在圆周上移动，当 C 落在直径的延长线 EDC 上时，作 ABC 直线，则 $\angle C$ 就是所求的三等分角.

当然这已不是欧几里得几何的尺规作图法，因为工具已经改变(即使只加一点!)，而且不合作图公法. 不过它说明了一个问题，有些初学者只知道三等分角是难题，但不知难在尺规的限制上，如不限于尺规，那真是易如反掌.

(十)《群牛问题》

阿基米德的论文向来是以命题的形式来表达的，而这篇的体例不同，它是用诗句写成的(原文见[7]，p. 203)．标题是给埃拉托塞尼的信. 胡尔奇 (Hultsch) 曾猜想这是阿基米德"显本领" (tour de force) 之作，以此向亚历山大的学者们(特别是阿波罗尼奥斯)挑战 (见[3]，p. 399)。但它的真实性颇值得怀疑，"群牛问题"大概很早以前就已存在，阿基米德只是重新研究而已. 诗句也未必出自他的手. 内容如下:

太阳神赫利俄斯 (Helios) 有一大群牛在西西里岛草原上放牧。公牛和母牛各有 4 种颜色，各种头数之间的关系如下:

令 W，w 分别表示白色公牛、母牛的头数；

X, x………………黑色 ……………………;

Y, y………………黄色 ……………………;

Z, z………………花色 …………………….

要求

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Y$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Z + Y$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Y$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Z + z)$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Y + y)$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w)$$

$W + X =$ 正方形(数)

$Y + Z =$ 三角数

所谓"三角数"就是形如 $\frac{m(m+1)}{2}$(m 是正整数)的数，它可以排成一个三角形. 倒数第 2 个条件是含混的，原话是"黑色和白色的公牛可以合起来排成一个方形，长与宽是相等的". 有两种可能解释，一是长与宽的数目相等，即

$$W + X = n^2 \text{（完全平方数）};$$

另一是方形的两个边长相等，但由于牛的身长与体宽不一样，方形两个边的数目并不相等，条件成为[1]

1）这种解释也很牵强，因为要挤成一个正方形，还需要考虑身长与体宽的比，故右端不是任意两个正整数之积 mn 而是 kn^2（k 是常数），这样问题并没有化简.

$$W+X=mn.$$

后一种情形较易解决，称为“较简问题”，而前一种情形称为“完全问题”。

“较简问题”已由 Jul. Fr. 武尔姆（Wurm）解决。“完全问题”在 1880 年为阿姆托尔（Amthor）所解决。即使较简问题，牛的总数也已达到 5916837175686 头之多！而完全问题导致 2 元 2 次方程

$$t^2-4729494u^2=1,$$

最小解牛的总数是 7.766×10^{206544}，位数超过20万！当时阿基米德未必解得出来。

其 他 工 作

(一)半正多面体（semi-regular polyhedron）

帕波斯在《数学汇编》中记述阿基米德发现了 13 种半正多面体。各个面是若干个不同类的正多边形，但同一类的都相等。例如 12 个相等的正 5 边形和 80 个相等的三角形构成一个 92 面体；6 个正 8 边形，8 个正 6 边形，12 个正方形构成 26 面体；26 面体又可以由 18 个正方形和 8 个正三角形构成。如此等等。

(二) 三角形面积公式

阿拉伯数学家比鲁尼（Abū'l Raihān Muhammad al-Bīrūnī, 973—1050?)记述，阿基米德发现了用边表三角形面积的公式

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

s 是三角形三边 a,b,c 之和之半，这公式通常归功于海伦（Heron，62 年前后），并称为海伦公式。

(三) 正 7 边形作图法

另一个阿拉伯数学家塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra, 806—901)指出，阿基米德发现正 7 边形的作图法。自然不是尺规作图。可惜方法已失传。

(四）天文学方面

阿基米德对天文学也深有研究，但著作没有留下来。西塞罗的书记载马塞勒斯攻占叙拉古时，曾获得两座阿基米德制作的天文仪器。一座是天球仪，上刻各个星座，后放置在神庙中。另一座为加卢斯（Gaiu Sulpicius Gallus，公元前166年为罗马执政官）所有。可称为天象仪（planetarium)，借助机械或水力表演日、月、行星的运行，还可以演示日、月食。

（五）阿基米德螺旋泵

历史学家狄奥多罗斯（Diodorus Siculus，公元前1世纪)记载阿基米德在埃及时，发明一种螺旋水泵，被埃及人广泛使用。

结　　束　　语

历史上有的数学家勇于开辟新的园地，而缺乏缜密的推理，有的数学家偏重于逻辑证明，而对新领域的开拓却徘徊不前。阿基米德则兼有二者之长，他将惊人的独创与严格的论证融为一体，更善于将计算技巧与逻辑分析结合起来。正确地注意理论与实际的联系，常常通过实践直观地洞察到事物的本质，然后运用逻辑方法使经验上升为理论（如浮力问题），再用理论去指导实际工作（如发明抗敌器械）。在严格性方面，实超过了15—17世纪的分析学家，他的理论比牛顿、莱布尼茨更加接近柯西、外尔斯特拉斯的 ϵ-δ 方法（例如阿基米德公理及穷竭法的使用）。只是没有强大的生产需求和适宜的社会环境，未能进一步发展起来。

这位独步千古的科学家，还具有崇高的爱国热忱，在祖国危亡的紧急关头，献出了自己的一切。他的爱国精神和爱科学的精神同样为万世所景仰。

文　　献

原始文献

[1] J. L. Heiberg, ed., Archimedis opera cum commentariis Eutocii, 二版 3 vols

Leipzig, 1910—1915.
[2] T. L. Heath, The works of Archimedes with the method of Archimedes, Dover Publications, Inc. 1912.
[3] E. J. Dijksterhuis, Archimedes, Ejnar Munksgaard, 1956.
[4] P. Ver Eecke, Les oeuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, 二版, 2 vols, Paris, 1960.

研究文献

[5] E. T. Bell, Men of mathematics, Simon and Schuster, 1937.
[6] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Co. I 1923.
[7] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, II 1957.
[8] B. L. van der Waerden, Science awakening, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954.
[9] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.
[10] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, II 1921.
[11] C. B. Boyer, A history of mathematics, Princeton University Press, 1968.
[12] J. Fauvel and J. Gray, The history of mathematics a reader, The Open University, 1987.
[13] C. B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development, Dover Publications, Inc., 1949(中译本：C. B. 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977)。
[14] C. H. Edwards, The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979（中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987）。

埃拉托塞尼

梁 宗 巨

(辽宁师范大学)

埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 约公元前276年[1]生于昔兰尼 (Cyrene),即现北非利比亚的舍哈特(Shahhat);约公元前195年卒于亚历山大. 地理学、数学.

埃拉托塞尼一生的大部分时间在亚历山大度过. 大约从公元前235年起,担任亚历山大附设于博物馆 (museum) 的图书馆馆长,直到去世. 博物馆原是祭祀缪斯 (Muses, 希腊神话中掌管文艺、天文等的九位女神)的地方,后来发展成为一所研究机构、图书馆及学院的联合体. 它从公元前4世纪后半期起,一直是希腊的学术文化中心,直到公元641年被焚毁为止,繁荣达千年之久!

埃拉托塞尼在到亚历山大之前,曾在雅典学习. 雅典当时哲学学派林立,人物荟萃,百家争鸣. 有柏拉图创建的"学园" (Academia), 也有亚里士多德"逍遥学派" (Peripatetic) 的"吕克昂" (Lyceum) 学校,还有"犬儒学派" (Cynic) 及"斯多葛派" (Stoic) 等等. 埃拉托塞尼博采众长,向多个学派学习. 先后师事逍遥学派的阿里斯顿 (Ariston of Chios), 柏拉图学派的阿凯西劳斯 (Arcesilaus) 及阿佩莱斯 (Apelles), 还有犬儒派的彼翁 (Bion) 等. 埃拉多塞尼兴趣广泛,举凡地理、天文、数学、哲学、历史、文学评论等均有所涉猎, 到亚历山大后, 又跟随诗人卡利马科斯 (Callimachus) 学习诗词. 他的博学多才, 后来赢得"五项全能" (pentathlus) 的雅号.

---

1) 生年另一说是约公元前 284 年,见[4],p.104.

他是阿基米德的挚友，阿基米德对他的评价很高。本世纪初发现的阿基米德《方法》，就是写给埃拉托塞尼，并请他给出严格证明的。《群牛问题》也是阿基米德通过埃拉托塞尼递交给亚历山大的学者的。但就学术成就而论，他比不上阿基米德，所以有 Beta[1]的绰号，意指"名列第二"，或指他是"柏拉图第二"（[6]，p.61）。

大约在公元前 245 年，埃拉托塞尼接受国王托勒密三世（Ptolemy III Euergetes，约公元前 246—前 221 年在位）的邀请，从雅典来到亚历山大，担任王子菲洛佩特[后来的托勒密四世（Ptolemy IV Philopator，公元前 221—前 205 年在位）]的教师。若干年后，成为举世闻名的亚历山大图书馆馆长，以终其一生。晚年因患眼疾，以致双目失明。他无法忍受不能读书的痛苦，竟绝食而死，时已年逾八十。

他曾著有《地理学》（Geographica）；《地球的测量》（On the measurement of the earth）；《倍立方问题》（On the duplication of the cube）；《柏拉图》（Platonicus）等书，可惜只有很少的片断流传下来。他的工作只能从别人的著作中得知。例如希腊地理学家斯特拉博（Strabo，约公元前 64—公元 23 年以后）的《地理学》（Geography）就有很多埃拉托塞尼的事迹的记载。

测量地球大小

埃拉托塞尼最受人赞扬和传诵的业绩是测量地球的大小。

希腊人最早提到地球周长的是亚里士多德，他说有的数学家试图算出地球的周长，认为可能是 400,000 希腊里（[7]，p. 369）。一个希腊里（stadium，复数 stadia）究竟有多长？其说不一。按 G. 普利尼（Pliny，公元 23—79 年）记载，应合 157.5 米（[4]，p. 107）。但较多的意见认为是 606 英尺 9 英寸，即 184.9 米[2]。不管

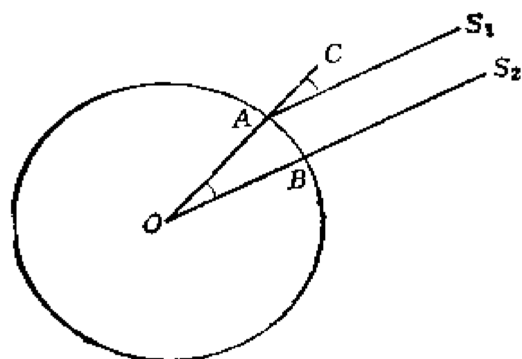
1）希腊文第 2 个字母。

2）例如见 Webster's international dictionary of the English language. London, 1902.

哪一种说法，上述的估计都是大大偏高的。亚里士多德没有说是谁推算的，猜想是欧多克索斯。

阿基米德因为要计算沙子的数目，故用到地球的周长，他说有人指出周长是 300,000 希腊里[1]，约合 55,470 公里。比真值(40,000 公里)大很多。

所根据的原理是：选择两个在同一条子午线上的地点（至少是经度大致相同），估计两地地理纬度之差，算出这个差是整个子午圈的几分之几，如果又知道两地的实际距离，就可以算出整个子午圈的长度。阿基米德提到的地点是赫勒斯滂（Hellespontos，即达达尼尔海峡，今属土耳其）的利西马基亚（Lysimachia）[2]，和塞伊尼（Syene，即现在埃及尼罗河畔的阿斯旺）[3]。这两地经度相差不算小，因此误差较大。关键的问题是怎样确定两地的纬度。所用的办法也是很粗糙的。天球上的巨蟹座（Cancer）经过塞伊尼的天顶，以巨蟹座的赤纬来作这地方的地理纬度。理论上虽然是正确的，但一个星座包含若干个星，赤纬从 9° 变化到 29°，不容易确定那一颗星恰好通过天顶。天龙座（Draco）的"龙头"通过利西马基亚的天顶，该地的地理纬度是 40°.5（约），而龙头的赤纬多大于50°，这样出入就太大了。再加上两地中间隔着地中海，实际距离就更难精确了（[4]，p. 106）。



埃拉托塞尼根据相同的原理，选择了更合适的地点：一个是赛伊尼，另一个是亚历山大。他假定太阳照射地球的光线是平行的。图中 A 是亚历山大，B 是赛伊尼，S_1A，S_2B 是来自太阳的平行光线，O 是地心，AC 是在亚历山大竖起的日

1) T. L. Heath, The works of Archimedes with the method of Archimedes Dover Publications Inc. 1912 p.222

2) 位于东经 27°，北纬 40°.5.

3) Aswan，位于东经 33°，北纬 24°，以修建了大水库而闻名.

晷．夏至日正午[1]，太阳光 S_2B 直射赛伊尼一个枯井的井底，因此知太阳正好在天顶[2]．而这时亚历山大的日晷 AC 却有日影．根据日影的长短，可算出 $\angle S_1AC$，也就是 $\angle BOA$．埃拉托塞尼给出这个角度是整个圆周的$\frac{1}{50}$．他使用一种“碗形”（bowl-shaped）或半球形日晷，即在碗底竖立一杆，杆影落在碗底的刻度上，立刻看出 $\angle S_1AC$（即太阳的天顶距）是圆周的几分之几．

下一步要估计两地的距离，骆驼每天走 100 希腊里，从亚历山大到赛伊尼要走 50 天，因此 AB 这一段弧长是 5000 希腊里，它占整个子午圈的$\frac{1}{50}$，故子午圈的长（通过南北极的地球周长）是 250,000 希腊里．

埃拉托塞尼所著的书《地球的测量》已失传，测量的具体过程及若干细节已不得而知，好在在别的书有较详细的记载，如克莱奥梅底（Cleomedes，约公元前 40）的《天体的圆形运动》（On the circular motion of the heavenly bodies）就有全面的描述（[6]，pp. 267—273）．此书给出的结果是 250,000 希腊里，但斯特拉博及赛翁（Theon of Smyrna，约公元 125 年）都给出 252,000 希腊里，不知为什么有这样的差异．猜想是为了便于计算，这样每一度恰好是 700 希腊里．反正是近似值，增加的 2000 还不到原来的 1%（[4]，p. 107）．

如取 1 希腊里＝157.5 米，则 252000 希腊里是 39690 公里，和真值惊人地接近，这恐怕是偶合．如取 184.9 米，则周长是 46595 公里，误差就较大．无论如何，这次测量是历史上的突破，其特点

1）这一点非常重要，两地的观测必须在同一个时刻进行．古人没有可携带的钟表，更没电讯设备，怎样保证同一时刻，这是首先要解决的问题．在同一个经度的地方，夏至日正午这一时刻是共同的，这样选择就保证了同时．而且那时日影最短，观测较便．不过亚历山大的经度是东经 30°，和赛伊尼相差 3°，这一点影响不很大．

2）这也是近似的．在北回归线上的地方，夏至日正午太阳才正好在天顶，赛伊尼却处北纬 24°，和北回归线约差半度．

是原理简单，方法易行，结果也较精确。但未为当时人所普遍采用。后来的天文学家托勒密却采用 180,000 希腊里这个误差很大的值。

素 数 筛 子

埃拉托塞尼另一项脍炙人口的发明是寻找素数的方法。它记载在尼科马霍斯(公元 100 年前后)的《算术入门》第 13 章中([8], p. 51, p. 204)。

要在自然数列中从小到大找出素数，先从 3 开始，将奇数列写出来[1]:

3	5	7	<u>9</u>	11	13	<u>15</u>	17	19
<u>21</u>	23	<u>25</u>	<u>27</u>	29	31	<u>33</u>	<u>35</u>	37
<u>39</u>	41	43	<u>45</u>	47	<u>49</u>	<u>51</u>	53	…

3 是第 1 个素数，将 3 后面所有 3 的倍数 9, 15, 21, 27, 33, …都划去；3 后面第 1 个未被划去的数是 5，将 5 后面所有 5 的倍数 25, 35, …(15 已被划去不再划)都划去；5 后面第 1 个未被划去的数是 7，将 7 后面所有 7 的倍数都划去。这手续可以重复下去，直到写出的数列最后一个数。未被划去的就是素数。

尼科马霍斯说这个方法叫做"筛子"(sieve)，但没有说明为什么叫筛子。后人通常把"筛"理解为"筛选"(sift)([9], p.58)，即将合数筛去(删去)，选出素数来。除此以外还有几种不同的解释。一种说法是希腊人是用涂蜡的板来记数和计算的，在要删去的数上点一个点，最后得到带有许多小点的蜡板，像一个筛子[2]。另一种说法是他们用纸草来记数，要删去的数干脆就挖掉，这张有许多小

1) 按照尼科马霍斯的分类，2 并不包含在素数之中，他所说的素数指的都是奇素数。而其他的偶数都不是素数，故不必列出来。

2) М. К. Гребенча, Арифметика, 1947 (中译本：М. К. 格列本卡，算术，商务印书馆，1953，p.138)。

洞的表活像一个筛子[1]。

其 他 工 作

倍立方问题（求作一立方体，使其体积等于已知立方体的两倍）是古希腊三大作图问题之一，埃拉托塞尼对此有过研究，并提出一种器械作图方法．他记载了两则关于倍立方问题起源的故事．

第一个故事说古代一位诗人描述克里特（Crete）王弥诺斯（Minos）为死去的儿子格劳科斯（Glaucus）修坟．他嫌造得太小，命令说："必须将体积加倍，但要保持立方的形状"．接着又说："赶快将每边的长都加倍"．

埃拉托塞尼指出这是错误的，因为边长加倍，体积就变成原来的 8 倍．他接着叙述了解决这问题的历史．最后给出自己的解法（[5]，p. 160）．

上述的内容，他是用短诗的形式写成一封信，奉献给国王托勒密三世的．并郑重其事地刻在国王的圣殿的大理石板上，还附有一个解决倍立方问题的器械模型（后面还要谈到）．

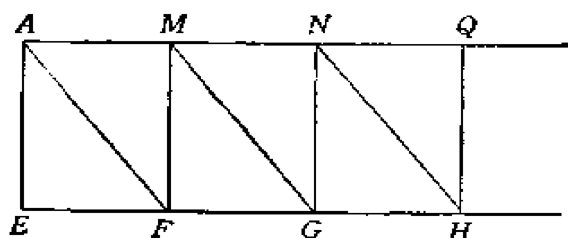
第二个故事记载在埃拉托塞尼另一本著作《柏拉图》中，为赛翁所引用（[5]．p.161）．说是鼠疫袭击提洛岛（Delos），一位先知说已得到神的谕示，必须将立方形的祭坛的体积加倍，瘟疫方可停息．建筑师很为难，便将这个"提洛问题"去请教哲学家柏拉图．柏拉图说：神的真正意图不在于神坛体积的加倍，而是想使希腊人为忽视几何学而感到羞愧．

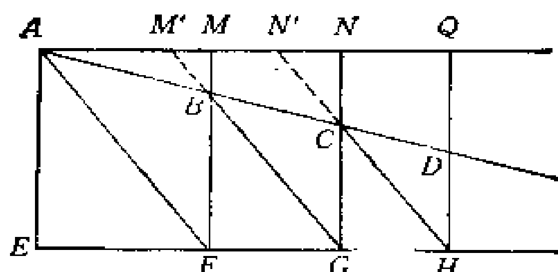
埃拉托塞尼解决倍立方问题的方法如下：前人已将此问题归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个等比中项 x，y 的问题．即求出 x, y，使 $a:x = x:y = y:2a$．制作三个相同的矩形薄片▭AF，▭MG，▭NH，镶嵌在两条平行的沟槽 AQ，EH 内．薄片可以彼此

---

1) Г. Н. Берман, Число и наука о нём, Гостехиздат, 1954（中译本：Г. Н. 别尔曼，数与数的科学，商务印书馆，1957，p.146）．

独立左右平行滑动，也可以重叠。三条对角线永远是平行的。左边第一个薄片不动，向左移动第二片，使它的一部分重叠在第一片下面，对角线 $M'G$ 与 FM 交于 B 点。再移动第三片，使它的一部分重叠在第二片下面，对角线 $N'H$ 交第二片的 GH 边于 C。设 D 是 HQ 中点，$HD=a$，则 $EA=2a$。现调整薄片的位置，使 A，B，C，D 在一条直线上。由于所构成的三角形是相似的，记 $FB=y$，$GC=x$，容易证明 $a:x=x:y=y:2a$，x，y 就是所求的两个比例中项。





这方法可以推广用于求任意两线段间的多个比例中项。

埃拉托塞尼还写过一本《论平均值》(On means)，根据帕波斯记载，此书讨论各种轨迹和平均值。在天文学方面，曾估计过月、地距离，日、地距离，但数值出入较大。又测出黄赤交角的两倍是圆周的 11/83。他的《地理学》是把地理研究置于合理的数学基础上的最早尝试。

文　　献

[1] G. Bernhardy, Eratosthenica, Berlin, 1822.
[2] E. H. Berger, Die geographische Fragmente des Eratosthenes, Leipzig, 1880.
[3] A. Thalamas, La géographie d'Ératosthène, Versailles, 1921.
[4] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, II 1921.
[5] B. L. van der Waerden, Science awakening, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954.
[6] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, II 1957
[7] D. E. Smith, History of mathematics, Dover Publications, Inc., II 1925.

[8] Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic, University of Michigen Press, 1938.
[9] F. Cajori, A history of mathematics, Macmillan Company, 1919.

阿波罗尼奥斯

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga）　约公元前262年生于佩尔格；约公元前190年卒。数学。

阿波罗尼奥斯是佩尔格（Perga 或 Perge）地方的人。古代黑海与地中海之间的地区，称为安纳托利亚（Anatolia。今属土耳其），其南部有古国潘菲利亚（Pamphylia），佩尔格是它的主要城市。

阿波罗尼奥斯年青时到亚历山大跟随欧几里得的后继者学习，那时是托勒密三世（Ptolemy Euergetes，公元前246—前221年在位）统治时期，到了托勒密四世(Ptolemy Philopator，公元前221—前205在位)时代，他在天文学研究方面已颇有名气。

后来他到过小亚细亚西岸的帕加马（Pergamum）王国[1]，那里有一个大图书馆，规模仅次于亚历山大图书馆．国王阿塔罗斯一世(Attalus I Soter，公元前269—前197年，前241—197年在位)除崇尚武功外，还注重文化建设。阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》从第4卷起都是呈递给阿塔罗斯的，后世学者认为就是这位国王．（见[5]，p.126;[6]，p.227;[4]，p. 595。）但存在一个疑点，他在写信给阿塔罗斯时直书其名，而没有在前面加上"国王"的称呼，这是违背当时的礼仪习惯的。可能有两种解释，一是他指的不是国

1）临爱琴海和马尔马拉海．公元前3世纪脱离塞琉西王国，成为希腊统治下的王国，都城帕加马．公元前133年成为罗马帝国一个行省．其遗迹1878年由柏林博物馆开始发掘。

王而是另一个同名的人，二是阿波罗尼奥斯相当放荡不羁，而这位君主确能礼贤下士，不拘小节。

在帕加马还认识一位欧德莫斯(Eudemus)[1]，《圆锥曲线论》的前3卷是寄给他的。在这书的第2卷的前言中，阿波罗尼奥斯说他曾将这一卷通过他儿子交给欧德莫斯，并说如果见到菲洛尼底斯(Philonides)时，请欧德莫斯将书也给他一阅。菲洛尼底斯是阿波罗尼奥斯在以弗所(Ephesus)[2]结识的几何学家，对圆锥曲线论颇感兴趣，阿波罗尼奥斯曾介绍过他和欧德莫斯认识。

第3卷没有留下前言。第4卷的前言是写给阿塔罗斯的，开头说这8卷著作的前3卷是交给欧德莫斯的，现在他已去世，我决定将其余各卷献给你，因为你渴望得到我的著作。

由此可知阿波罗尼奥斯写此书是在晚年，至少是在儿子成年以后。又知道他到过以弗所。他的主要成就是建立了完美的圆锥曲线论，总结了前人在这方面的工作，再加上自己的研究成果，撰成《圆锥曲线论》(Conics) 8大卷，将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使后人没有插足的余地。直到17世纪的B. 帕斯卡(Pascal)、R. 笛卡儿(Descartes)，才有实质性的推进。欧托基奥斯(Eutocius of Ascalon，约生于公元480年)在注释这部书时说当时的人称他为"大几何学家"。

阿波罗尼奥斯常和欧几里得、阿基米德合称为亚历山大前期三大数学家。时间约当公元前300年到前200年，这是希腊数学的全盛时期或"黄金时代"。(见[14]，p.157.)

主 要 著 作

《圆锥曲线论》是一部极其重要的著作。在第1卷的前言中，阿波罗尼奥斯向欧德莫斯述说撰写的经过："几何学家诺克拉底

---

1) 不是罗德岛的欧德莫斯(Eudemus of Rhodes，公元前320)。

2) 希腊伊奥尼亚城市，在小亚细亚西岸，今土耳其伊兹密尔附近，公元前6世纪是吕底亚王国的工商业中心。

斯（Naucrates）来到亚历山大，鼓励我写出这本书。我赶在他乘船离开之前仓促完成交给他，根本没有仔细推敲。现在才有时间逐卷修订，并分批寄给你”。

这部书是圆锥曲线的经典著作，写作风格和欧几里得、阿基米德是一脉相承的。先设立若干定义，再由此依次证明各个命题。推理是十分严格的，有些性质在欧几里得《几何原本》中已得到证明，便作为已知来使用，但原文并没有标明出自《原本》何处，译本为了便于参考，将出处补上。（比较[6] pp.280—335 中的希腊原文和英译文。）后人对此颇有微词。阿基米德的传记作者甚至说阿波罗尼奥斯将阿基米德未发表的关于圆锥曲线的成果据为已有。此说出自欧托基奥斯的记载，但他同时说这种看法是不正确的。帕波斯（Pappus）则指责阿波罗尼奥斯采用了许多前人（包括欧几里德）在这方面的工作，而从未归功于这些先驱者。（见[7]，p 203.）当然，他在前人的基础上作出了巨大的推进，其卓越的贡献也是应该肯定的。

《圆锥曲线论》的出现，立刻引起人们的重视，被公认为这方面的权威著作。帕波斯曾给它增加了许多引理，塞里纳斯（Serenus，4 世纪）及许帕提娅（Hypatia）都作过注解。欧托基奥斯校订注释前 4 卷希腊文本。9 世纪时，君士坦丁堡（东罗马帝国都城）兴起学习希腊文化的热潮，欧托基奥斯的 4 卷本被转写成安色尔字体（*uncial*，手稿常用的一种大字体）并保存下来，不过有些地方已被窜改。

前 4 卷最早由叙利亚人希姆斯（Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī，卒于 883 或 884）译成阿拉伯文。第 5—7 卷由塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra，约公元 826—901 年）从另外的版本译成阿拉伯文。纳西尔丁（Naṣīr ad-Dīn al-Ṭūsi，1201—1274）第 1—7 卷的修订本（1248 年）现有两种抄本藏于英国牛津大学博德利（Bodleian）图书馆，一种是 1301 年的抄本，一种是 1626 年第 5—7 卷的抄本。

第 1—4 卷的拉丁文译本于 1537年由 J. B. 门努斯（Menus）

在威尼斯出版。而较标准的拉丁文译本由 F. 科曼迪诺（Commandino，1509—1575）译出，于1566年在博洛尼亚出版。其中包括帕波斯的引理和欧托基奥斯的评注，还加上许多解释以便于研读。第5—7卷最早的拉丁译本的译者是 A. 埃凯伦西斯（Echellensis）及 G. A. 博雷利（Borelli，1608—1679），1661年出版于佛罗伦萨，是从983年阿拉伯文抄本译出的。天文学家 E. 哈雷（Halley，1656—1743）参考了各种版本，重新校订了第1—7卷拉丁文本及第1—4卷希腊文本，1710年在牛津出版。

目前权威的第1—4卷希腊文、拉丁文对照评注本是 J. L. 海伯格（Heiberg，1854—1928）的"Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis"（《佩尔格的阿波罗尼奥斯的现存希腊文著作，包括古代注释》）2卷，1891—1893在莱比锡出版。阿拉伯文本只有第5卷的一部分正式出版，并附 L. 尼克斯（Nix）的德译文（1889，莱比锡）。现代语的译本有 P. V. 埃克（Eecke）的法文译本"Les coniques d'Apollonius de Perge"（《佩尔格的阿波罗尼奥斯的圆锥曲线论》），前4卷根据希腊文本，后3卷是根据哈雷的拉丁文本，1923年出版于布鲁日（Bruges），1963年重印于巴黎。T. L. 希思（Heath，1861—1940）编订的英译本"Apollonius of Perga，Treatise of conic sections"（《佩尔格的阿波罗尼奥斯，圆锥曲线论》）1896年剑桥大学出版社出版，1961年重印。此书实际是意译本或改编本。另一种英译本为 C. 托利弗（Taliaferro）所译（1939），载于《西方名著丛书》（Great books of the western world，1952，不列颠百科全书出版社）第11卷中，但只有1—3卷。

除了《圆锥曲线论》外，阿波罗尼奥斯还有好几种著作，为后世的学者（特别是帕波斯）所提及。列举如下：

1.《截取线段成定比》（On the cutting-off of a ratio）；

2.《截取面积等于已知面积》（On the cutting-off of an area）；

3.《论接触》（On contacts 或 Tangencies）；

4.《平面轨迹》（Plane loci）；

5.《倾斜》(Vergings 或 inclinations);

6.《十二面体与二十面体对比》(Comparison of the dodeca hedron with the icosahedron).

此外还有《无序无理量》(Unordered Irrationals)、《取火镜》(On the burning-mirror)、圆周率计算以及天文学方面的著述等。

圆锥曲线论的前驱工作

在阿波罗尼奥斯之前，圆锥曲线的研究已有一百多年的历史。它是由倍立方问题引起的[1]。所谓"倍立方"，就是求作一立方体，使其体积为一已知立方体的2倍。希波克拉底(Hippocrates of Chios)首先指出它可以归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个等比中项[2]。设 x, y 是这两个中项，$a:x = x:y = y:2a$，则 $x^2 = ay$，$y^2 = 2ax$，$xy = 2a^2$，于是得 $x^3 = 2a^3$。如果 a 是已知立方体的边，那么 x 就是所求立方体的边。前面几个二次方程在解析几何中是抛物线与等轴双曲线，由此导致这两种曲线的发现。这发现一般归功于门奈赫莫斯(Menaechmus，约公元前350年)，普罗克洛斯(Proclus)推测他是用两条圆锥曲线的交点来解决倍立方问题的。

他又用平面去截圆锥面，得到三种截线。圆锥面是直角三角形围绕一个不动的直角边旋转所产生的。不动的直角边叫做轴，斜边叫做母线，通过轴的平面与圆锥面相交而成的三角形叫做轴三角形。轴三角形的顶角有锐角、直角、钝角的三种情形。门奈赫莫斯用垂直于一条母线的平面去截圆锥面，所得到的截线当轴三角形的顶角是直角时叫做"直角圆锥截线"(section of the right-angled cone)，现称抛物线；当顶角是钝角时叫做"钝角圆锥截线"(section of the obtuse-angled cone)，现称双曲线；当顶角是锐角

1) 另一种说法是由日晷的研究引起。见[8]，p.226.

2) 根据普罗克洛斯(Proclus，约412—485)在欧几里得《原本》卷1注释中的记载。见[6]，p.253.

时叫做"锐角圆锥截线"(section of the acute-angled cone)，现称椭圆[1]. 这些名称为欧几里得、阿基米德所沿用，直到阿波罗尼奥斯，才证明一个平面和一个圆锥面相交，也可以得到这三种曲线。

圆锥曲线发现后，进展很快，研究的成果足以使阿里斯泰奥斯(Aristaeus，约公元前340年)写出5卷本《立体轨迹》(Solid loci)，也就是圆锥曲线论[2]. 这名称的来源可能是把圆锥曲线看作一种轨迹，而它可以通过用平面截取立体(圆锥面)得到。

不久又出现欧几里得4卷本的《圆锥曲线》(Conics)，更有系统地阐述了若干锥线的性质. 可惜此书连同阿里斯泰奥斯的书均已失传，只能从帕波斯的著作中得知其大概. 帕波斯认为阿波罗尼奥斯是以这4卷为基础，再加上4卷才完成其8卷的巨著的。

欧几里得对圆锥曲线的认识并不限于门奈赫莫斯的三种截法(截面垂直于一母线)，他在《现象》一书中曾指出：用平面去截正圆柱或正圆锥，只要平面不平行于底，其截线就是"锐角圆锥截线"(椭圆)，其形状似盾牌. 阿基米德在《劈锥曲面与回转椭圆体》(On conoids and spheroids)中更进一步证明任何一个椭圆都可以看成是一个圆锥面的截线，这个圆锥面顶点的选择有很大的任意性(命题7,8). 由此可知，在阿波罗尼奥斯之前，并非不知道这三种曲线也可以用别的方法获得，但仍采用门奈赫莫斯的定义，理由可能是处理某些问题时更加简单方便. (见[10]，p.245.)

阿基米德对圆锥曲线以及由圆锥曲线产生的回转体作了深入的研究，如求面积、体积、重心、浮力等等. 到此为止，圆锥曲线的理论已经积累了大量的资料. 正象欧几里得将初等几何问题整理成一个严密的体系那样，将圆锥曲线问题也整理出来已经有了足够的条件，这关键性的一步，是由阿波罗尼奥斯来完成的。

---

1) 根据帕波斯、欧托基奥斯等的记载，见[9]，pp.153--179.

2) 另一种看法认为他还写了5卷《圆锥曲线基础》(Elements of conics)，但多数的意见认为是同一部书的不同名称.

《圆锥曲线论》内容简介

第 1 卷的序言是给欧德莫斯的信，简单说明了写书的经过和全书的主要内容。全书共 8 卷，前 4 卷是基础部分。第 1 卷给出三种截线的一般定义和主要性质，他说这些内容"比其他作家写的更全面也更一般"。

序言之后给出 8 个定义。以前用直角三角形绕直角边的回转来定义圆锥，只得到正圆锥。阿波罗尼奥斯改变了产生圆锥的办法：

给定一个圆及圆所在平面外一点 V，连接 V 与圆周上的一点，并向两端延长成一直线。令这直线沿着圆周移动，最后回到出发点，这直线就描绘出圆锥曲面的两支。这两支分别位于点 V 的两侧，可向两侧任意伸展。固定点 V 叫做圆锥面的顶点，给定的圆叫做底。 点 V 与圆心 O 的联线叫做轴，如果轴 VO 垂直于底，这圆锥叫做正圆锥 (right cone)，如轴不垂直于底，则叫做斜圆锥 (scalene cone)。此外还定义了直径、共轭直径、截线的轴等。

定义之后给出 60 个命题。下面取出最有代表性的命题 13 来分析一下，即可窥见阿波罗尼奥斯推理思想的一斑。

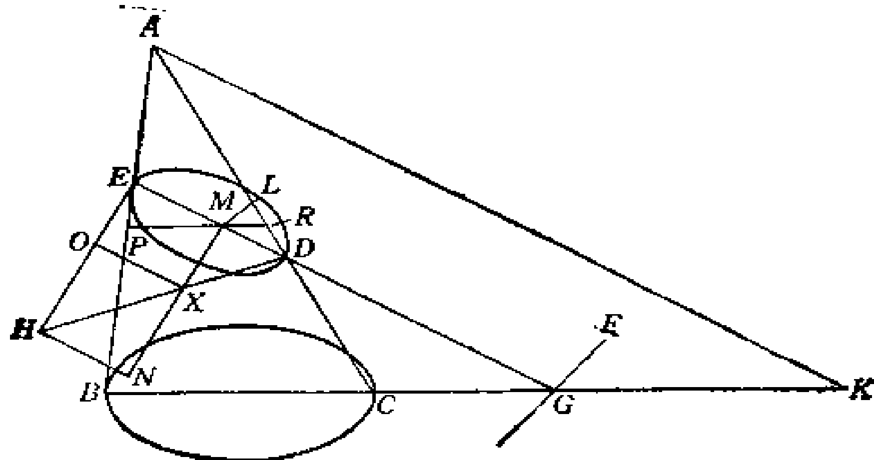


图 1

设有斜圆锥 ABC，任作一平面，与圆锥的底平面相交于 GF

(GF 位于底圆之外)，与圆锥面交于曲线 EDL. 作底圆的直径 $BC \perp GF$ (即过圆心作直线垂直于 GF) 并延长之交 GF 于 G. 通过直径 BC 及顶点 A 的平面与圆锥相交而成的 $\triangle ABC$ 是轴三角形. E, D 是轴三角形与曲线的交点，E, D, G 均在轴三角形平面上，又在截平面上，故 EDG 是轴三角形平面与截平面的交线.

在圆锥截线上任取一点 L，作 $ML /\!/ GF$，交 ED 于 M. 过 M 作 $PR /\!/ BC$，则 PR 与 ML 所确定的平面与底平面平行[1]，因此与圆锥面的交线是一圆(图中未画出). P, L, R 是此圆周上三点，且 PR 是直径，而 $ML \perp PR$[2]. 设 $EM = x, ML = y$，则

$$y^2 = PM \cdot MR \tag{1}$$

在轴三角形平面内作 $AK /\!/ EG$ 交 BC 的延长线于 K，因 $\triangle EPM \backsim \triangle ABK$，故

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}, \tag{2}$$

又 $\triangle MRD \backsim \triangle ACK$，故

$$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK} \tag{3}$$

(2)，(3)两式左右相乘，

$$\frac{PM \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2} \tag{4}$$

圆锥及截平面给定后，ED 即已确定，记 $ED = 2a$，则

$$MD = 2a - x.$$

式(4)的右端也是常数，记作 $\frac{p}{2a}$ 再由式(1)，(4)可写成

$$y^2 = \frac{p}{2a} \cdot x(2a - x) \tag{5}$$

---

1) 一平面上的两相交直线分别与另一平面上的两相交直线平行，则此二平面平行.

2) 因 $ML /\!/ GF$，而 $GF \perp BC$，$BC /\!/ PR$.

过E作 $EH\perp EG$，使 $EH=p$. 连接 HD，作 MN 与 EH 平行且相等，交 HD 于 X，作 $XO\perp EH$. 在 $\triangle EHD$ 中，

$$\frac{EO}{EH}=\frac{MX}{EH}=\frac{MD}{ED}=\frac{2a-x}{2a},$$

即

$$EO=\frac{p}{2a}(2a-x).$$

代入(5)，

$$y^2=EO\cdot x.$$

此式表明 EO，EM 构成的矩形面积等于 ML 上的正方形.

在欧几里得几何中，常见这样的作图题：以 EM 为一边作一个矩形，"贴合"（application）[1] 到 EH 上去，使其面积等于一个已知正方形. 所谓"贴合"，就是矩形的一条边与 EH 重合，其长度可以小于、等于或大于 EH.

更一般的提法是求作平行四边形，贴合到已知线段上去，使其满足某种条件（如有一个角等于已知角，或与某平行四边形相似等），且面积等于某已知图形（参见欧几里得《几何原本》卷 I 命题 44，卷 VI 命题 27，29 等）.

此处以 EM 为一边，贴合到 EH 上，使其面积等于 ML 上的正方形. 所求矩形 $EOXM$ 的一边 $EO<EH$，这种情形叫做"不足"（falling short，希腊文是 ἔλλειψις），后来这个词渐渐变成专门的术语，取代"锐角圆锥截线"而成为一类圆锥曲线的名称. 这就是"椭圆"（英 ellipse，法 ellipse，德 Ellipse，意 ellisse，西 elipse，俄 эллипсис）一词的来源. 对于双曲线的情形，矩形的一边 $EO>EH$，这时叫"过剩"（exceeding，ὑπερβολή），后来转化成"双曲线"（英 hyperbola，法 hyperbole，德 Hyperbel，意 ipèrbole，西 hipérbola，俄 гипербола）. 而"抛物线"（英 parabola，法 parabole，德 parabel，意 paràbola，西 parábola，俄 парабола）的字源就是

1）面积的贴合问题最早为毕达哥拉斯所用，后在欧几里得《几何原本》中多次出现.

“贴合”（$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$），既非不足，也非过剩[1]. 这些名称最先为阿波罗尼奥斯所创用，一直沿用到现在. 抛物线之名出自命题 11，双曲线出自命题 12，椭圆出自命题 13.

本例贴合到 EH 上的矩形的边是不足的，阿波罗尼奥斯称所得的截线为椭圆. 如建立一个坐标系，问题就看得更清楚. 以 E 为坐标原点，EDG 为横轴，过 E 作平行于 ML 的直线为纵轴. 这样就得到笛卡儿斜角坐标系. $ML\perp PR$，但一般不垂直 ED，故为斜角坐标. x,y 是 L 点的横、纵坐标，恒满足(5)，即

$$y^2=px-\frac{p}{2a}x^2, \tag{6}$$

在解析几何中这正是椭圆的方程.

用类似的方法可以得到另外两种截线. 如果截平面和底圆相交，而且和圆锥面的另一支(位于顶点 A 的另一侧)也相交，便得到双曲线，其方程为

$$y^2=px+\frac{p}{2a}x^2, \tag{7}$$

如截平面平行于一条母线，则与底圆相交，但只与圆锥的一支相交，这时得到抛物线，方程为

$$y^2=px. \tag{8}$$

方程中的 p 在图中是线段 EH，叫做矩形的“竖直边”(erect side)，原文是 $\delta\rho\theta\acute{\iota}\alpha$（原意是竖直），相当于现在的“正焦弦”（latus rectum）. 式(6)，(7)，(8)表明，椭圆、双曲线、抛物线上任一点的纵坐标的平方分别小于、大于、等于正焦弦乘以横坐标.

这几个方程是圆锥曲线的基本性质. 阿波罗尼奥斯在这一卷中用语言来表述并证明了这些性质，以后就利用它推导出其他性

1）圆锥曲线理论于明末、清初随着西方天文历法输入我国，译名开始时不统一. 椭圆还有斜圆、长圆形、瘦圈界、鸭蛋形等名称；抛物线又叫圭窦形；双曲线也叫陶丘形. 伟烈亚力、李善兰译《代微积拾级》(1859 年)统一用今名，但《数学名词》(1935)抛线与抛物线并用，双线与双曲线并用，直到《数学名词》(1956)才最后统一用现在的名称.

质而不必再依赖于圆锥曲面。他没有创用符号，更没有使用方程，但其中实际上含有深刻的坐标制思想。完全可以相信笛卡儿的坐标制得自阿波罗尼奥斯的启发。另一个来源则可能是天文和地理用经纬度来表示点的位置，这在希腊也早已不是新鲜的事。

本卷后面的命题很多牵涉到直径、共轭直径及切线等问题，这些概念和现今解析几何中的概念是一致的。对于椭圆来说，任一组平行的弦，必为某一条通过椭圆中心 O 的直线 AB 所平分(图 2)，这直线叫做椭圆的直径。而在这一组弦中通过中心的那一条 CD 与 AB 互为共轭直径。CD 也平分任一条平行于 AB 的弦。双曲线的情况稍有不同，任两条共轭直径一条与双曲线相交，另一条则不相交。抛物线的直径必平行于其对称轴，它没有共轭直径。

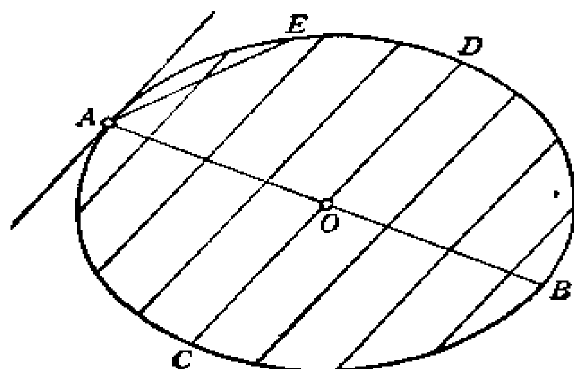


图 2

在图 1 中，阿波罗尼奥斯实际是用斜角坐标去刻划圆锥截线的性质，EDG 是横坐标轴，过 E 且平行于 ML 的直线是纵坐标轴[1]。可以证明 ED 是椭圆的直径，它平分与 ML 平行的任一弦。ML 方向叫做“纵坐标”(ordinate，希腊原文是 τεταγμένως，原意是“有序”、“规则”)方向。在图 2 中如以直径 AB 为横坐标轴，则与 CD 平行的方向就叫纵坐标方向。

命题 17 证明了这样的性质：通过直径 AB 的端点 A 作直线平行于纵坐标方向，则这直线必落在椭圆之外。不然的话，若有一段 AE 落在椭圆内，则这是一根弦，必被 AB 平分，这是不可能的。因命题 10 已证明延长弦的两端，必超出椭圆外。

和椭圆相交于一点，又完全落在椭圆外的直线现在叫做切线。不过当时没有切线的名称，只用“与曲线‘接触’(touch)的直线”

1) 他当然没有使用坐标的名称。

来表达. 阿波罗尼奥斯对切线的理解和欧几里得是一样的，或者说他的观点来自欧几里得. 在《几何原本》卷 I 命题16中证明了过直径端点且垂直于直径的直线必完全落在圆外，且此直线与圆周之间不可能再插入其他直线. 阿波罗尼奥斯将它移植到圆锥曲线来.阿基米德与此不同,他对切线的看法带有运动学的观点.

本卷有相当多的命题是牵涉到切线的. 如命题 33 给出抛物线切线的一个性质.

抛物线的任一组平行的弦必被某一条直线 AB 所平分(图3)，这 AB 叫做抛物线的直径. 它一定平行于抛物线的对称轴 VX. 设 EF 是被 AB 平分于 D的弦，延长 AB 至 T，使 $TA=AD$. 过A作平行于纵坐标方向 DE 的直线 AC,则 AC 是抛物线的切线,联结 TF，TF 也是抛物线的切线.

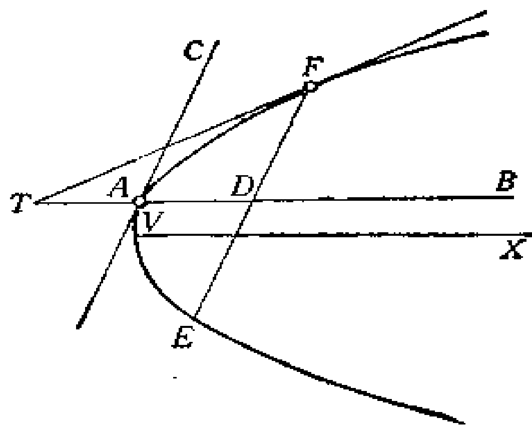


图 3

上述性质已为阿基米德（或更早的阿里斯泰奥斯及欧几里得)所知,他在《方法》中用到过.

还有一些命题(41—50)相当于坐标变换，将一组共轭直径换成另一组,用以描绘圆锥曲线,相当于将一个斜角坐标系变换成另一个斜角坐标系，证明基本性质不变. 如变成互相垂直的共轭直径,就相当从斜角坐标变换成直角坐标.

这一卷最后还有好几个作图题，要求作出满足某些条件的圆锥曲线.

第 2 卷用很大的篇幅来讨论双曲线的渐近线. 命题 1 给出定义并证明其存在. 这是阿波罗尼奥斯的独创，前人没有论述过. “渐近线”(asymptote, 希腊原文 ἀσύμπτωτος 原意是“不可能相交”)的名称也是他引入的. 命题 14 证明如果将双曲线和渐近线

无限延长，可使两者的距离任意小。命题 17 证明共轭的双曲线具有相同的渐近线。还有一些命题给出直径、切线、渐近线之间的种种关系。

第 2 卷第 44—53 命题是一些作图题。包括求作有心圆锥曲线的中心，求作圆锥曲线的对称轴、直径，从曲线外一点向曲线作切线，还有作满足某种条件的切线等。

第 3 卷前面有若干个命题是关于面积和比例的。指出由各种线段如直径、对称轴、弦、渐近线、切线等所构成的三角形、四边形、矩形等之间的相等、和、差、比例的关系。

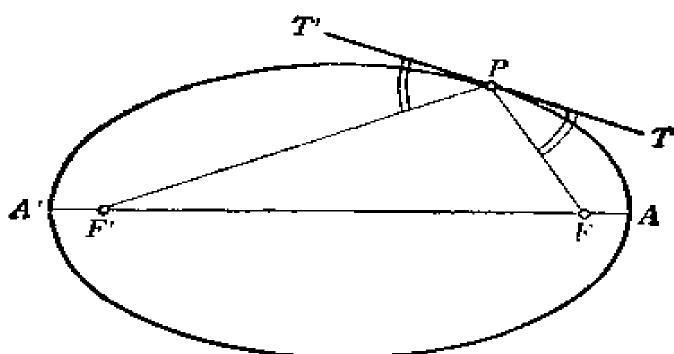


图 4

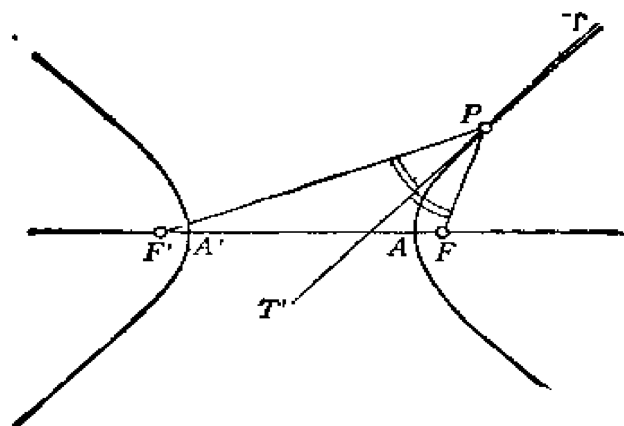


图 5

命题 45 以后的几个命题颇值得注意，这是椭圆与双曲线的焦点性质。但没有给出焦点的专门名称，把焦点说成是“由贴合产生

的点”.

焦点 F', F 的位置由下式确定:

$$A'F' \cdot F'A = A'F \cdot FA = \frac{p}{4} \cdot A'A.$$

其中 A', A 是对称轴与曲线交点, p 是正焦弦. 如用 a, b 表示椭圆的半长轴与半短轴,或双曲线的半实轴与半虚轴,在笛卡儿直角坐标系中椭圆与双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$p = \frac{2b^2}{a}$. 上面确定焦点位置的等式相当于

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ (椭圆的情形)},$$
$$c^2 - a^2 = b^2 \text{ (双曲线的情形)},$$

其中 $(\pm c, 0)$ 是焦点的坐标, $c = \sqrt{a^2 \pm b^2}$. 阿波罗尼奥斯确定的位置和解析几何是一致的.

命题 48 证明了著名的焦点切线性质: 在 P 点的切线 $T'T$,与两焦点半径 $F'P$, FP 交成等角. 即 $\angle F'PT' = \angle FPT$ (图 4), 或 $\angle F'PT' = \angle FPT'$ (图 5).

奇怪的是,全书竟没有提到抛物线的焦点,更没有焦点准线统一定义: 一动点到一定点(焦点)的距离与到定直线(准线)的距离之比是常数 e,则动点轨迹是圆锥曲线. $e < 1$ 时是椭圆, $e = 1$ 时是抛物线, $e > 1$ 时是双曲线. 书中也没有出现离心率的概念.

这是一个谜,可能有两种解释. 一是在帕波斯(4 世纪)之前,希腊人并不知道抛物线有焦点, 当然也不知道焦点准线定义. 这是数学史家 M. 康托尔的看法. (见[11], pp. 339, 344.)帕波斯认为欧几里得已知焦点准线定义,这只是他的推测,当时欧几里得的《圆锥曲线》已经失传. 很难想象这样重要的性质阿波罗尼奥斯既已知道但又不把它收入其巨著中. 另一种解释是他在别的已失传的著作中作了专门的论述, 无需在此重复. 这两种解释都存在一些疑问.

近年来出版了狄俄克利斯(Diocles, 约公元前 190—180 年前后)《取火镜》[1], 对这问题有了进一步的认识. 根据图默的考证, 狄俄克利斯和阿波罗尼奥斯约略同时, 后者可能看到《取火镜》,他认为别人既已详细讨论过,就不必写在自己的书中了.

《取火镜》一开头就说明本书的缘起: 天文学家芝诺多罗斯(Zenodorus, 约公元前 180 年)提出这样的问题,什么样的镜面对着太阳,能使反射的光线集中到一点而引起燃烧?这问题实际已由多西修斯 (Dositheus, 公元前 225 年前后)解决, 答案是"直角圆锥截线"的回转面. 本书的目的就是要给出理论的证明. 至于前人是否已有证明, 书中没有明确. 传说阿基米德曾用取火镜烧毁敌船,虽是夸大的说法,但他已知道取火镜这一事实是可信的.

至于焦点 (focus) 这一术语,最早是由 J. 开普勒 (Kepler) 在 1604 年创用的[2].

第 3 卷还有几个命题是所谓" 3 或 4 条直线的轨迹"问题.

在平面上给定 3 条(或 4 条)固定的直线, 一动点与一直线的距离的平方正比于与另外两条直线距离之积,求动点的轨迹(若为 4 条直线,则动点与其中两条直线距离之积,正比于与另外两条直线距离之积). 所谓距离,或者是垂直距离, 或者是距离的直线与固定直线交于一定的角度.

用解析几何方法很容易看出轨迹是圆锥曲线. 以 3 直线为例,设直线方程为

$$A_i x + B_i y + C_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

又量距离的直线分别与固定直线交于 $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ 角, 于是根据点与直线距离的公式,有

$$\frac{(A_1 x + B_1 y + C_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)\sin^2\theta_1} = \frac{K(A_2 x + B_2 y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\sin\theta_2}$$

---

1) 此书原藏在伊朗东北部的马什哈德圣地 (Mashhad Shrine) 图书馆,是阿拉伯文译本.原希腊文本已失传. 手稿的年代是 1462—1463 年. 由 G. J. 图默 (Toomer) 英译并注释. 见[12], pp. 15, 26, 34.

2) 《取火镜》英译本 p. 15 注 13. focus 来自拉丁文, 原意是壁炉.

$$\times\frac{(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}\sin\theta_3},$$

这是关于 x,y 的 2 次方程,因此必为圆锥曲线。

阿波罗尼奥斯用综合几何去处理这一问题，认为这是自己的得意杰作,他在全书的序言中特别提到:

"第 3 卷包含许多出色的定理,……其中最优美的是我新发现的。我注意到欧几里得并没有解决'3 或 4 直线的轨迹'问题，仅仅是碰到某些特例,而且也没有成功。因为没有我发现的定理,要彻底综合解决是不可能的"。

几百年后，帕波斯介绍这一问题时将它进一步推广于 4 条以上的直线。他认为阿波罗尼奥斯仍未完全解决这一问题，并且对他过份夸耀自己的成就，而鄙薄前人劳动的颇欠谦逊的态度表示遗憾。

又过了一千多年,笛卡儿(1637)用代数方法去研究"3 或 4 直线轨迹",这是促使他去创立解析几何的动机之一。他在《几何学》(La géométrie)([13])中从这一问题入手去阐发他的坐标几何思想.

第 4 卷除了继续第 3 卷讨论圆锥曲线的极点与极线的调和性质之外，还用很大的篇幅去探讨圆锥曲线交点的个数。证明了两圆锥曲线相交至多有 4 个交点。

第 5 卷的内容十分新颖，着重讨论极大极小问题。考虑从某一点到圆锥曲线的最大和最小距离。用现代的术语来说，最大最小线段都在法线的方向上。当时没有法线的名称,只是证明了:设 O 是一固定点,P 是曲线上一点,若 OP 是最大或最小距离,则通过 P 且垂直于 OP 的直线必为曲线的切线。进一步研究法线的数目,设在椭圆的长轴上取一点 H,H 可向椭圆作 4 条法线 (图 6),包括长轴本身。现将点的位置向着纵坐标的方向向上(或向下)移动,到达某一点 G_2 (或 G_1)处,法线仍然是 4 条,但过了 $G_2(G_1)$,法线突然变成只有 2 条.这种分界点的集合构成一个封闭的图形,在图形内部的点可向椭圆作 4 条法线，在图形外部的点一般可以作两条法线。

用现代微积分可以证明这图形就是椭圆的渐屈线或法包线，

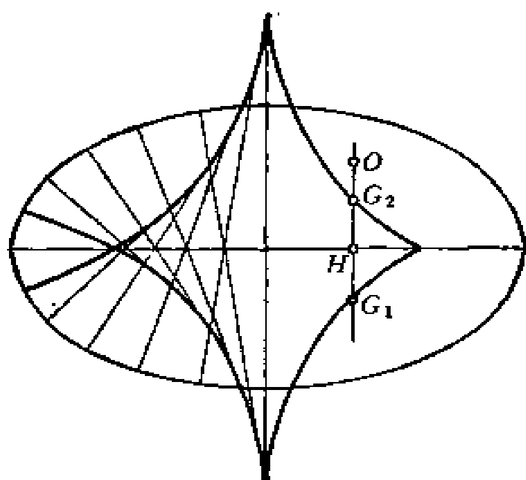


图 6

即法线的包络．对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 来说，渐屈线是 $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$．抛物线的渐屈线具有这样的方程 $y=kx^{3/2}$，称为半立方抛物线．阿波罗尼奥斯并没有引入这一类曲线，只限于对每一点 H，确定相应的分界点 G_1, G_2．

第 6 卷没有什么重要的内容，前一部分讲述全等的及相似的圆锥曲线，还有圆锥曲线弓形．后一部分是一些作图题，如从一个正圆锥如何截取一条曲线与已知圆锥曲线相等．

第 7 卷是关于共轭直径的论述，如：命题 12．椭圆两个共轭直径上的正方形之和等于两个对称轴上的正方形之和．命题 13．双曲线两个共轭直径上的正方形之差等于两个对称轴上的正方形之差． 命题 31．椭圆或双曲线的两条共轭直径所构成的平行四边形(以其交角为内角)等于两条对称轴所构成的矩形．

第 8 卷已失传，从第 7 卷的序言中，可以看出它大概是第 7 卷的继续或补充．哈雷根据帕波斯所提供的线索，进行了卓有成效的复原．

《圆锥曲线论》是一部经典巨著，它可以说代表了希腊几何的最高水平．自此以后，希腊几何便没有实质性的进步．直到 17 世纪的笛卡儿和帕斯卡，圆锥曲线的理论才有所突破．以后便向着两个方向发展，一是笛卡儿的解析几何，二是射影几何，两者几乎同时出现．这两大领域的思想和基本原理，都可以在阿波罗尼奥斯的工作中找到萌芽．

和阿基米德比较，阿波罗尼奥斯注意图形的几何性质，而阿基

米德侧重数值计算，这使他成为微积分的先驱。

《圆锥曲线论》的篇幅很大，第1—7卷就有387个独立命题，完全用文字来表达，没有使用符号和公式。命题的叙述相当冗长，言辞有时是含混的，在希腊的著作中，这是较难读的一种。

其　他　著　作

1. 帕波斯提到阿波罗尼奥斯除了《圆锥曲线论》之外，还有6种著作，但只有《截取线段成定比》完整地保存下来，而且只是阿拉伯文本。哈雷将它译成拉丁文，于1706年出版。书共两卷，讨论下述问题：

设有两直线，平行或相交，在其上各有一点 A，B，现从某一点 O 作直线与此二直线交于 M，N 二点，使 $AM:BN$ 等于已知比。

全书围绕这一问题考虑了各种可能情形。它导致一个二次方程。问题的解就相当于给出这二次方程的几何解法。

2. 《截取面积等于已知面积》和前一问题相仿，不同之处是要求 AM 与 BN 构成的矩形与已知面积相等，即 $AM \cdot BN$ 为已知数。

3. 《论接触》提出一个有名的作图题：设有3个图形，可以是点、直线或圆，求作一圆通过所给的点(如果3个图形中包含点的话)并与所给直线或圆相切。共有10种可能情形：(1)点，点，点；(2)点，点，线；(3)点，线，线；……(9)线，圆，圆；(10)圆，圆，圆。最著名的是最后一种情形：求作一圆与3已知圆相切，常称为“阿波罗尼奥斯问题”。其解法已失传，详见[5]，p. 184。

4. 《平面轨迹》讨论能用直尺圆规作出的轨迹，即直线与圆。圆锥曲线在希腊时代叫做“立体轨迹”(solid loci)，而其他曲线(如螺线、蚌线、蔓叶线等)叫做“线性轨迹”(linear loci)。本篇讨论的问题隐含反演的思想。

下篇证明了一个轨迹问题：与两点的距离之比等于常数(≠

1)的动点轨迹是一圆。后人称它为"阿波罗尼奥斯圆"。

5.《倾斜》是某一类作图题。例如要求作一线段，使它或它的延长线通过一定点，而两端点落在二直线或圆周上。

6. 欧几里得《几何原本》原文只有13卷，第14卷是后人添加上去的，作者是许普西克勒斯（Hypsicles，约公元前180年）。他在序中提到阿波罗尼奥斯曾写过《正十二面体与正二十面体的对比》，指出这两种正多面体如内接于相等的球内，那么两者面积之比就等于体积之比。

阿波罗尼奥斯还作过圆周率的计算，但结果已失传，可能还设计过一种以"万"（myriad）为基础的记数法。

天 文 学 说

阿波尼奥斯对天文学也有深入的研究。他推算过月球到地球的距离，因此有 ε 的绰号（这希腊字母形似月亮）。

在哥白尼（16世纪）之前，西方天文学一直奉行托勒密（2世纪）的地球中心说。其要旨是一切天体都围绕地球旋转。行星的轨道，并不单纯是一个以地球为中心的圆，而是沿着一个叫做"本轮"（epicycle）的小圆旋转，本轮的中心又沿着一个叫"均轮"（deferent）的大圆旋转，均轮的中心才是地球。这种"本轮、均轮"说最早为赫拉克利德（Heraclides of Pontus，约公元前390—前339年以后）所倡导，不过只限于解释水星、金星（内行星）的运行。（见[5]，p. 195.）阿波罗尼奥斯推广用于一切行星，并作了详细的数学论证。最后由托勒密集其大成，构造了盛行一千多年的地心说体系。

文　　献

原始文献

[1] J. L. Heiberg, Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis, 2 vols. Leipzig, 1891—1893.

[2] P. Ver Eecke, Les coniques d'Apollonius der Perge, Bruges, 1923, Paris 重印, 1963.

[3] T. L. Heath, Apollonius of Perga, treatise of conic sections, Cambridge, 1896, 重印 1961

[4] R. Catesby Taliaferro, Conics of Apollonius of Perga, Great books of the western world 11, Encyclopaedia Britannica, Inc. 1952, 23次印刷1980.

研究文献

[5] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, II 1921.

[6] I. Thomas, Seletions illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, II 1957.

[7] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[8] O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity Brown University Press, 1957.

[9] G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, Arno Press, 1976.

[10] B. L. van der Waerden, Science awaekening, Translated by A. Dresden. P. Noordhoff Ltd., 1954.

[11] M. Cantor, Vorlesungen über Gescichte der Mathematik, B. G. Teubner, 1922.

[12] G. J. Toomer, Diocles on burning mirrors, Springer-Verlag, 1976.

[13] The geometry of René Descartes, Dover Publications, 1954.

[14] C. B. Boyer, A history of mathematics, Princeton University Press, 1985.

尼科米迪斯

梁 宗 巨
（辽宁师范大学）

尼科米迪斯（Nicomedes）约公元前250．数学．

尼科米迪斯以发现蚌线（conchoid）著称．他曾批评埃拉托

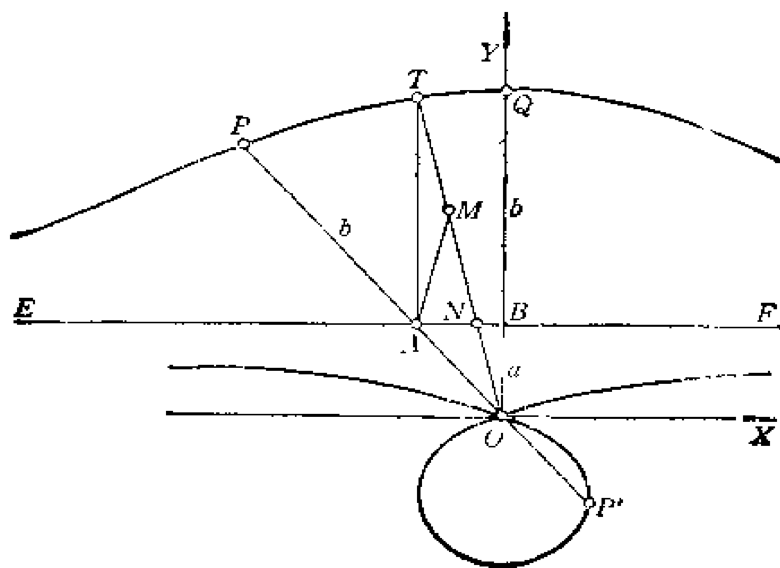


图 1

塞尼解决倍立方问题的方法不切实用，也不是几何方法．而阿波罗尼奥斯指出某一种曲线和蚌线属同一类型．据此可以肯定尼科米迪斯生存的年代介于此二人之间，即公元前3世纪中期．

他的著作《论蚌线》（On conchoid lines）已失传，现在只能从帕波斯、欧托基奥斯（[1]）、普罗克洛斯（[2]）等的书中得知其内容．

尼科米迪斯描述这样一种曲线：设 $OY \perp OX$，直线 $EF /\!/ OX$，与 OX 的距离为 a。过 O 任作直线 OAP 交 EF 于 A，在此直线上取 P, P' 点，使 $AP = AP' = b$（定长），则 P 及 P' 的轨迹称为蚌线。O 称为极点（pole），EF 称为准线（directrix），b 称为模（modulus）[1]。

曲线分上下两支，上支在准线之上，称为上蚌线（sperior conchoid），下支在准线之下（P' 的轨迹），称为下蚌线（inferior conchoid）。在笛卡儿直角坐标系中，它的方程是

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = b^2 y^2.$$

若以 OX 为极轴，则极坐标方程是

$$\rho = \frac{a}{\sin\phi} \pm b.$$

蚌线的形状，取决于 a, b 的大小。（[7]，pp. 100—104.）图 1 表示 $b > a$ 的情形，下蚌线有一个结点。如 $b = a$，下蚌线通过 O，是一个尖点。如 $b < a$，两支均在 OX 之上。上蚌线在帕波斯的书中称为"第一蚌线"，这是应用最广的。此外还有"第二"、"第三"、"第四"蚌线，大概是指下蚌线的三种情形。

尼科米迪斯发明蚌线的机械作图器，构造很简单，图 2 是 17 世纪时的仿制品。（[8]，[5] p. 299.）在直尺 AB 上刻一槽 GH（准线），动尺 MF 上有一固定的钉 K，可在槽内自由滑动。CD 尺垂直于 AB，其上有固定的钉 L（极点），套入动尺的槽 IF 中。动尺移动时，K 在 GH 内滑动，L 在 IF 内滑动，动尺端点 M 处的笔就画出蚌线。近代的仪器有所改进，可同时画出上、下蚌线。（[7]，p. 103.）

普罗克洛斯曾记述尼科米迪斯利用蚌线去解三等分角的问题。（[2]）帕波斯及欧托基奥斯（[1]）也有所论列。原理十分简单，在图 1 中，设 $\angle AOB$ 是待三等分的角。取模 $b = 2OA$，以 O 为极点，EF 为准线作上蚌线，过 A 作 $AT /\!/ OY$ 交蚌线于 T，连

1) 在帕波斯的书中，EF 及 b 分别称为"尺"（ruler）与"间隔"（interval）。（[6]，p. 301.）现改用今名。

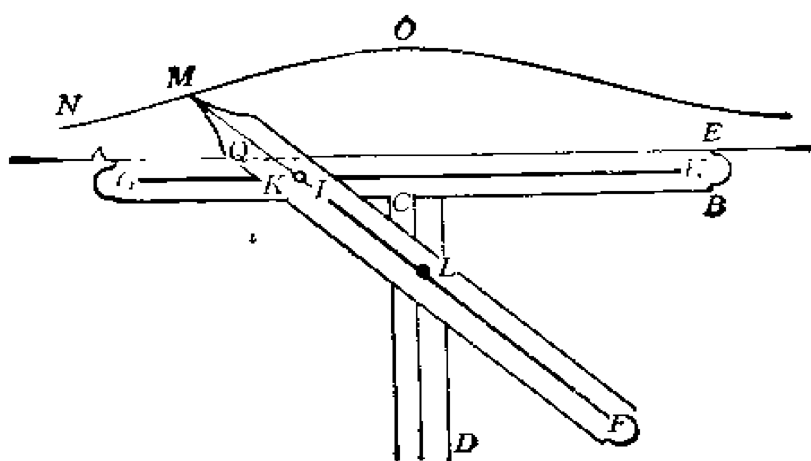


图 2

OT 交 EF 于 N，取 NT 中点 M．由蚌线性质 $NT=b=2OA$，于是 $NM=MT=AM=OA$，$\angle AOM=\angle AMN=2\angle ATO=2\angle TOB$，故 $\angle TOB$ 就是 $\angle AOB$ 的 1/3．（[5]，p. 299.）

尼科米迪斯还用蚌线来解决倍立方问题，即求两个已知线段的两个等中项．帕波斯对此也有记载．（[4]，p. 260.）

问题是求作两已知线段 $BA=a$，$BC=b$ 的两个等比中项．以 BA，BC 作两边完成矩形 $ABCL$，取 BA 的中点 D，延长 LD 交 BC 的延线于 G．过 BC 中点 E 作 $FE\perp BC$，使 $FC=DA$，连 GF，作 $CH/\!/GF$．

下一步要作 FHK 交 CH 于 H，交 BC 的延长线于 K，使得 $HK=FC=DA$．这要用到蚌线．以 F 为极点，CH 为准线，

FC 为模作蚌线，交 BC 的延线于 K，则 $HK = FC$. 延长 KL 交 BA 的延线于 M，现证明 CK，AM 就是所求的等比中项.

$$EK^2 - EC^2 = (EK + BE)(EK - EC) = BK \cdot CK,$$

EC^2 移至右端后两端加 FE^2 得到

$$FK^2 = BK \cdot CK + FC^2. \tag{1}$$

$$DM^2 - DA^2 = (DM + BD)(DM - DA),$$

即

$$DM^2 = BM \cdot AM + DA^2. \tag{2}$$

由平行性

$$\frac{AM}{BA} = \frac{LM}{KL} = \frac{BC}{CK},$$

但

$$BA = 2DA, \quad BC = \frac{1}{2}GC,$$

故

$$\frac{AM}{DA} = \frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK},$$

由合比定理 $\frac{DM}{DA} = \frac{FK}{HK}$. 而 $DA = HK$（作图），从而 $DM = FK$. 比较(1)，(2)式可知

$$BM \cdot AM = BK \cdot CK,$$

于是

$$\frac{CK}{AM} = \frac{BM}{BK} = \frac{CL}{CK} = \frac{AM}{AL},$$

又 $$CL = BA = a, \quad AL = BC = b,$$

故 $$a:CK = CK:AM = AM:b.$$

尼科米迪斯以后的一千多年，蚌线的研究没有多大进展. 直到 16 世纪后期，帕波斯及欧托基奥斯的著作重新引起人们的注意，蚌线以其作图简单再次激发学者探讨的热忱.

下面的命题被称为“尼科米迪斯引理”：任给二直线 X，Y 交

于定角，角外有一点 P，则可通过 P 作直线，使它被 X,Y 所截取的线段等于给定的长 b。作法是以 P 为极点，X,Y 之一为准线，b 为模作蚌线与另一直线相交。

F. 韦达（Viète）将这引理作为《几何补论》（Supplementum geometriae，1593）的公设，用以解决可导致三、四次方程的问题，包括正七边形的作图。J. 莫尔特（Molther，1619）用此引理找到更简单的求两个等比中项的办法。笛卡儿在《几何学》（La géométrie，1637）中讨论蚌线切线的作图法。P. de 费马（Fermat）和 G. P. 罗贝瓦尔（Roberval）也讨论同样的问题，同时注意到上下两个分支。C. 惠更斯（Huygens，1653）则发现拐点的简洁求法。牛顿也多次应用了"尼科米迪斯引理"，在他的《广义算术》（Arithmetica universalis）中解决三、四次方程的问题。17 世纪还将蚌线推广，将准线换成圆，产生"圆的蚌线"（conchoid of a circle）。这是 É. 帕斯卡为了解决三分角问题引入的(1637)，后来罗贝瓦尔称之为"帕斯卡蜗线"（limaçon of Pascal），一直沿用至今。

文　献

[1] Eutocius, Commentary on Archimedes' Sphere and Cylinder, in Archimedes Opera onmia, J. L. Heiberg 校订，2 版III, Leipzig, 1915.

[2] Proclus, Commentary on Euclid I, G. Friedlein 校订，Leipzig, 1873.

[3] Gino Loria, Le scienze esatte nell'antica Grecia, 2版，Milan, 1914.

[4] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[5] D. E. Smith, History of mathematics, Dover Publications, Inc. II, 1953.

[6] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, I, 1957.

[7] A. A. Савелов, Плоские кривые, Москва, 1960.

[8] Bettini, Apiaria universae philosophiae mathematicae, Bologna, 1641.

希帕霍斯

梁宗巨

（辽宁师范大学）

希帕霍斯（Hipparchus）[1]　约公元前180生于小亚细亚的比提尼亚（Bithynia）的尼西亚（Nicaea），即今土耳其西北角的伊兹尼克（Iznik），前127以后卒于罗得岛（Rhodes）．天文学、数学、地理学．

希帕霍斯生活的年代，是以他的天文观测为依据的．这些观测后来记载在托勒密的《天文集》（Almagest）中．最早的观测是公元前147年9月26—27日的秋分，这是毋庸置疑的，最晚的是公元前127年7月7日月亮的位置．托勒密还从希帕霍斯的书中引用从公元前162年到公元前128年之间的一系列春分与秋分的观测，不过不能肯定都是希帕霍斯自己的工作．

他一生的大部分时间是在罗得岛[2]度过的，移居到那里不迟于公元前141年．他的著作很多，但只有一种《欧多克索斯和阿拉托斯〈现象〉的注释》(Commentary on the Phaenomena of Eudoxus and Aratus）流传下来．这是他的早年论著，不能算是代表作，但已包含很多创新的思想．公元前4世纪中，欧多克索斯写过一本天文学，给出若干星座的名称，并加以描述(此书现已失传)．阿拉托斯(Aratus，约公元前315—约前239年)是历史上最早用诗歌描写科学内容的人，他写了一篇长诗，记述天文、气象，名为《现象》(Phaenomena)．后来阿塔罗斯（Attalus of Rhodes）对此书作了

1）旧译伊巴谷．

2）位于小亚细亚西南角．也是数学史家欧德莫斯的故乡．

注释。这些工作所论列的恒星只有相对的位置，没有数学的定量分析，而且还有很多不确切的地方。希帕霍斯的《注释》是对这三人工作的评论和补充。

他认为要确定恒星的位置，首先要建立坐标系。实际上他已开始使用了黄道与赤道两种坐标系。不过还不完整，也没有创用专门的术语。称"赤纬"（declination）为"沿着过极点的大圆与赤道的距离"。"赤经"（right ascension）的表达也很奇特，如说成"沿着平行的小圆占据某某星座若干度"。他将平行于赤道的小圆划分为12等分，每一分30°，以一个星座为标志，用与这个星座的距离表明恒星的赤经。在讨论星座升降时同时使用了黄道坐标系。

在著这本书时希帕霍斯已经积累了许多天文观测的经验，力图用球面三角的方法去解决天体的位置问题。促使天文学从定性的描绘走向定量的预测，这是一大进步。

制作一个精密的星表，是希帕霍斯一大功劳。根据普林尼（Pliny，公元23—79年）[1]的记载，希帕霍斯看到一颗星突然大放光明而且在众星间移动。经后世学者考证，认为是一颗新星（nova）。又和中国古书记录对照，确定是发生在公元前134年天蝎座（Scorpius）的新星。《前汉书》卷26《天文志》载："元光[2]元年（公元前134年）六月，客星[3]见于房[4]。"就是指这颗星[5]。

希帕霍斯看到这颗新星，在惊讶之余，决心制作一个星表留给后人，以便鉴别哪些星发生变化（光度、位置）。在他之前，已经有阿里斯蒂洛斯（Aristyllus）、蒂莫哈里斯（Timocharis，公元前3世纪初）等人绘制过星表，然而星数很少，位置也不准确。希帕霍斯的星表远远超过前人，可惜已失传，幸而后来被吸收到托勒密的

1）载于他的《自然史》（*Historia naturalis*）卷II中。

2）汉武帝年号。

3）中国古代所谓客星，大半是指新星，属于恒星里的变星的一种，它的光度在几天内增加几千几万倍。但有时又指彗星。

4）相当于西方的天蝎座。

5）陈遵妫《中国古代天文学简史》，上海人民出版社，1955，p.71。

著名星表中去。希帕霍斯星表一般认为包含 850 颗星，此说出自 F 博尔 (Boll)[1]。后来托勒密的星表增加到 1022 颗。希帕霍斯还按星的亮度将星分等，最亮的 20 颗是 1 等星，依次是 2,3,4,5,6 等，6 等星仅能为肉眼看见。这种分类为后世所沿用，尽管后来有更精确的定义。

为了观测天体，他还改进了仪器。由于希帕霍斯的著作大部分失传，他的工作只能从别人的书中去了解。特别是托勒密，他是古代影响最大的天文学家，对希帕霍斯推崇备至并引用其大量的研究成果。托勒密描绘希帕霍斯发明一种“瞄准器”(diopter)，一根约 2 米长的方木杆，上面有沟槽可容一挡板在其中滑动，木杆一端竖立一块有小孔的板，从小孔看出去，调整挡板的位置使它正好遮住目标。由挡板与小孔距离及挡板宽度就可以算出被测物体的视直径，或两点间的视距。还有一种星盘 (astrolabe)，是有刻度的圆盘，可测天体的方位和高度。J. B. J. 德朗布尔 (Delambre) 认为希帕霍斯还使用过浑仪 (armillary sphere) ([3])，是由几个圆环套起来的仪器，这些圆环表示地平圈、赤道圈、黄道圈等。他还制作一个天球仪，将恒星刻在上面，星数比他的星表还多。

希帕霍斯在晚年作出了一项重大的贡献，就是发现了“岁差”(precession)。岁差是春分点在黄道上退行的现象。天体在天球上的位置，是以春分点为标准的，即春分点是坐标的原点。希帕霍斯积累了多年的观测数据，和古代的记录比较，发现许多恒星的黄经有系统的变动，而黄纬的变动不大。例如一等星角宿一(spica)[2]，他测得距秋分点 6°，而大约 160 年前蒂莫哈里斯的记录却是 8°。他断定这是秋分点(也是春分点)移动的结果。蒂莫哈里斯是在公元前 283 年或 295 年观测的，而他是在公元前 129 年(或前 128 年)，即在 154 年或 166 年间移动了 2°，平均每年移动 46″.8 或 43″.4 ([7]，II p. 254)。这就是岁差现象。现代精确的值是

1) F. Boll, "Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemaios", *Bibliotheca mathematica*, 3rd ser., 2(1901), pp. 185—195.

2) 二十八宿第一宿的最亮星，即室女座 α(α Vir)。

春分点每年在黄道上西移 50".29.

他的另一项工作是重新测定回归年及朔望月的长度，曾著《关于一年的长度》(On the length of the year) 一书，惜已失传。他用自己对夏至点的测定（公元前 136 或 135 年）和 145 年前阿里斯塔克（Aristarchus of Samos，约公元前 310—前 230）的数值比较，认为原先假定每一个回归年等于 $365\frac{1}{4}$ 天太长。他测得夏至比预期的提早半天到来，因此一个回归年应该是 $365\frac{1}{4}-\frac{1}{300}$ 天[1]。

接着又写了《关于闰月与闰日》(On intercalary months and days)，提出新的置闰方法。以 304 年为一个周期，其中 112 年有 13 个朔望月，192 年有 12 个朔望月，一共含 3760 个朔望月，又一个周期有 111,035 天，也就是一个朔望月有 29.53058 天，和现今公认的值密近。

他另外又给出几种"月"之间的关系：126,007 天零 1 小时，包含 4267 个朔望月，4573 个近点月，4612 个恒星月；5458 个朔望月等于 5923 个交点月。这相当于给出：

1 朔望月 (synodic month) = 29.530593 天，

1 近点月 (anomalistic month) = 27.554568 天，

1 恒星月 (sidereal month) = 27.321562 天，

1 交点月 (nodical month) = 27.21222 天。

这和现代精密测定的值惊人地接近（只有几秒甚至 1 秒以下的出入）。

托勒密认为他得出这些值，是根据巴比伦人的记录加上自己的观测。F. X. 库格勒 (Kugler) 分析了巴比伦泥板之后，证实了这一点[2]。

他还有一项工作是重新计算太阳、月亮的大小和距离。大约

1）这数值仍比实际的 365.2422 日长 6 分多钟。

2）F. X. Kugler, Die Babylonische Mondrechnung, Freiburg im Breisgau, 1900.

一个世纪之前，阿里斯塔克就做过同样的事，他利用月亮在上弦或下弦时日、月、地球三者构成一个直角三角形的关系，估计日地距离与月地距离之比。原理是正确的，只是缺乏精密的观测，所得结果较粗糙。他又注意到在两个不同的地方观测月食，食相不同，由此推出日、月的直径。（[7]，II p. 12.）所得的数值是月球直径：地球直径在 43:108(=0.398) 与 19:60(=0.317) 之间，这和实际的 0.2725（约等于 3:11）相差不大。但对太阳直径的估计则相差很远。

希帕霍斯改进了方法，取得相当好的结果。他观测一次日食，这次日食可以确定发生于公元前 190 年 3 月 14 日[1]。在赫勒斯滂(Hellespontos，即达达尼尔海峡，今属土耳其)看到日全食，而在亚历山大只看到日偏食，最大食分是 4/5. 这两个地方的地理经度接近而纬度不同。由此推算出月球的视差 (parallax)[2]，在计算中假定太阳的视差为 O，因太阳距离甚远，暂忽略其视差不计。他得到的结果是：月球直径是地球的 1/3，月地距离是地球半径的 $60\frac{1}{2}$ 倍。第一个数值仍然偏大，第二个数值很接近真实情况。现在知道月地平均距离为 384400 公里，地球平均半径为 6371 公里，前者为后者的 60.34 倍。希帕霍斯给出太阳直径是地球的 $12\frac{1}{3}$ 倍（实际是 109 倍），日地距离是地球半径的 2500 倍（实际是 23500 倍）。以当时的测量水平，测不出这么远的距离是不足为奇的。

早期的希腊天文学家，认为圆是最完美的图形，如果天体 A 绕 B 旋转，轨道必定是圆形，运行是匀速的，而且 B 必在圆心上。地心说主张一切天体都围绕地球转，地球应该在圆的中心。但这无法解释行星运行时快时慢，有时还有逆行. 于是有偏心 (eccentric)

---

1) 详细分析见 G. J. Toomer, Hipparchus on the distances of the sun and moon, *Archive for history of exact sciences*. 14 (1975), pp. 126-142.

2) 两地观测同一物体时其视线间所成的角.

及本轮（epicycle）的假设，即地球并不在圆心上而是在圆心附近，又行星沿着一个叫本轮的小圆旋转，而本轮的中心又沿着均轮（deferent）旋转。这两种假设已为前人所提倡，希帕霍斯加以发挥及补充，最后由托勒密完成。以后随着地心说被推翻，这些假设已成为历史陈迹。

希帕霍斯在天球上使用坐标，在地球上也倡议用经纬度来表示位置。大约在150年前，亚里士多德的门徒狄赛阿霍斯（Dicaearchus，约公元前355—约前285年）在地图上的个别地方已画出纬度线，表明在同纬度的地方正午时太阳的高度相同。希帕霍斯加上经度，扩大使用这种方法。到了托勒密，经纬度才完整地出现在地图上。

在数学上，希帕霍斯是三角学的最早创建者，有时被称为"三角学之父"（the father of trigonometry）[1]。他的主要贡献有二：一是制作了一张弦表（table of chords），二是将球面三角方法用于天文计算。弦表就是在固定的圆内不同圆心角所对弦长的表，相当于现在圆心角一半的正弦线的2倍。这是世界上最早的三角函数表。（[5]，p. 451；[9]。）此表在托勒密的书中得到全面的反映，载在《天文集》卷I第11章。（[8]）托勒密沿用巴比伦人的60进记数法，将整个圆周分为360°，每度分为60′，每分分为60″等等。又将直径分为120等分，以1等分作为长度的单位。120是怎样来的？可能从两个角度来考虑：首先是量弧长和量弦长应该采用相同的长度单位，弧长的单位是圆周的1/360，直径应该是$360/\pi$，但这数不是整数，不便于计算，若取近似值$\pi = 3$，那么直径就是120个单位；其次，120正好是60的2倍，与60进制的基数一致。

弦表记载了从0°到180°每隔半度圆心角所对的弦长，其功能相当于从0°到90°每隔1/4°的正弦函数表。其数值实际是以半径的1/60为单位的正弦函数线的长。例如，对6°的弦长应该

1) Carl B. Boyer, A history of mathematics, Princeton University Press, 1985, p. 179.

是 $2\sin 3° = 0.104671912$，但表中所载是 $6^p 16' 49''$，此处 p 表示一个单位长，以下用 60 进分数表示。

除了弦表之外，有几件事表明希帕霍斯已通晓球面三角学的一些原理和方法，例如某种类型的球面直角三角形的解法等。

帕波斯提到希帕霍斯写过一本《黄道十二宫的升起》(On the rising of the twelve signs of the zodiac)，证明十二宫升起的时间是不同的。他不仅仅用前人的图解法，而且使用了弦表，通过解球面三角形，用数字表示出来。

此外，在他唯一流传下来的书中，描述一颗星，位于赤道之北 $27\frac{1}{3}°$，他算出此星在地平圈上所划过的弧长是全圆周的 $\frac{15}{24}-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{24}=0.62291667$.([1], pp. 301—302.)更精确的值是0.62253999(假设观测点在罗得岛，地理纬度 36°N)，误差只有万分之6。这里需要求解一个球面直角三角形，可见希帕霍斯已掌握一定的球面三角知识。

早期的三角学是隶属于天文学的，它由天文计算的需要而兴起。希帕霍斯对天文学作出巨大的贡献，促使天文学从经验的、描述的阶段发展成为理论的、可以进行预测的科学。同时也开辟了三角学这一领域。

文　献

[1] O. Neugebauer, A history of ancient mathematical astronomy, 3 vols., New York, 1975.

[2] J. L. Heiberg, Claudii Ptolemaei opera quae extant omnia, I, Syntaxis mathematica, 2 vols., Leipzig, 1898—1903.

[3] J. B. J. Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1817—1819.

[4] Paul Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1893.

[5] A. Rome, ed., Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, I, Rome, 1931.

[6] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[7] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press,

1921.

[8] Asger, Aaboe, Episodes from the early history of mathematics. L. W. Singer Company, 1964, p. 103.

[9] G. J. Toomer. The chord table of Hipparchus and the early history of Greek trigonometry, in *Centaurus*, 18(1973), pp. 6—28.

海　　伦

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

海伦 [Hero（或 Heron）of Alexandria] 约公元62年前后活跃于亚历山大。数学、物理、气体力学、机械学。

生存的年代

海伦生活的年代可能是历代数学家中争议最大的，各家的意见有好几百年的出入。下面列举几种较有影响的说法：

(1) 将海伦和蒂西比奥斯（Ctesibius）联系起来（见[2]，p. 43.）有一种《武器制造法》(Belopoeïca, On the construction of engines of war) 的手抄本，将蒂西比奥斯的名字和海伦连在一起作为篇名。还有一本不知名的拜占廷作者写于10世纪的书中有这样的词句："阿斯克拉（Ascra，古希腊地名）的蒂西比奥斯，亚历山大的海伦的教师"。（见[3]，p. 298.）由此推断海伦是蒂西比奥斯的学生，或者就是他的儿子。蒂西比奥斯是机械发明家，曾发明一种水钟，可能是漏壶（clepsydra）一类的器械，还有利用水力或气压驱动的各种机械，生活于公元前3世纪末或公元前2世纪，这样海伦的活跃期应是公元前2世纪。

但另一本同样内容的手稿，标题是《亚历山大的海伦的武器制造法》，没有标上蒂西比奥斯。大概海伦改进了先辈的发明，后人认为他在思想或方法上师承蒂西比奥斯，并不意味着就是他直接

教导的学生。

(2)《度量论》(Metrica) 是海伦的代表作，过去一直以为它早已失传。1896 年 R. 舍内 (Schöne) 在君士坦丁堡(即土耳其的伊斯坦布尔)发现它的手抄本，[1] 1903 年校订出版。从中可以较准确地定出年代的上界。书中多处援引阿基米德(卒于公元前 212 年)的工作，至少三处引用阿波罗尼奥斯 (Apollonius，约卒于公元前 190)，又引用过关于“圆内直线(即弦)”的书。在希帕霍斯 (Hipparchus，约公元前 180—约前 125 年)之前，无人实际作出弦表，故估计引用的是他的书。据此推断海伦活动年代不早于公元前 150 年。另一方面，帕波斯 (Pappus) 大量摘引海伦的著作，而帕波斯的书大致完成于戴克里先 (Diocletian) 统治时期(284—305)，由此界定海伦的年代在公元前 150—到公元 250 年之间，这上、下限距离仍然很大。

(3) 维特鲁维厄斯(M. Vitruvius Pollio，公元前 1 世纪上半期一约公元前 25 年)是罗马有名的建筑学家，以 10 卷的《建筑学》著称于世。在这书的第 7 卷中列举了 12 位机械师，如阿尔希塔斯 (Archytas，公元前 375)、阿基米德 (Archimedes，公元前 287—前 212 年)、蒂西比奥斯、菲隆 (Phiton of Byzantium) 等，还有一些不甚知名的，但没有列海伦。较合理的解释是他在维特鲁维厄斯之后。又两人使用的器械相异之处甚多，如维特鲁维厄斯的路程计 (hodometer) 是走一罗马里就有一块小石子落在盒子里，而海伦的仪器是用指针指示全程。可见前者没有看到海伦的设计。据此可以将海伦的年代定在公元后。

(4) L. J. M. 科卢梅拉(Columella，约公元 23—79 年)是农业、天文学家。他所用的计算公式甚至实际数值很多和海伦是一致的。包括弓形面积的近似公式 (b 是底，h 是高)：

$$S = \frac{1}{2}(b + h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2} b\right)^2.$$

---

1) 约抄写于 11 或 12 世纪。

自然可以推想他们是同时代的人。

(5) 和托勒密(Ptolemy，约公元 100—约170年)比较，应将海伦放在托勒密之前。普罗克洛斯(Proclus，公元 410—485 年) 曾指出:托勒密认为用古人的水钟来测量太阳的视直径是不可靠的，所谓水钟应当就是海伦描述的那一种，因此海伦应早于托勒密。但 T. L. 希思(Heath)比较了两人的著作后得出相反的结论，说海伦在后，而且比帕波斯早不了多少，也就是应为 3 世纪的人。(见[3]，p.306.) 而 W. 施密特 (Schmidt) 却将活动年代定在公元 50 年前后。(见[4]，p.125.)

(6) 最有说服力的是根据一次月食来确定年代。海伦的重要著作《测量仪器》(On the Dioptra) 描述一种"照准仪"(dioptra 或 diopter) 的工具，其功能类似现代的经纬仪，用作测量及天文观测。他特别指出可以测量可望不可即的物体的高和距离。在这本书里，海伦利用可在两地同时看到同一次月食的道理，推出两地的地方时差，从而算出两地的距离。他选定亚历山大和罗马这两个地方作为试点，某一年在春分前 10 天发生一次月食，在亚历山大开始于夜里"五更" (fifth watch)[1)]。数学史家 O. 诺伊格鲍尔(Neugebauer，1899—)断定这次月食发生在公元 62 年，而且在 500 年间没有类似的月食。日月食的推算是可靠的，因此将海伦的活跃年代定在公元 62 年前后也是可信的。诺伊格鲍尔的论断发表于 1938 年，以后的学者大多数以此为准。(见[5]，p. 178.)

(7) 还有一种说法值得一提，曾有人认为海伦有两个，老海伦生存于公元前 2—3 世纪，是工程师和发明家，而另一个小海伦是 7—8 世纪的人。那本载有三角形面积公式的《测量仪器》乃是小海伦所作。理由是公式的推导是那么复杂而有独创性，但却从未为老海伦以后的古代学者所引用。此说出自 M. 玛力 (Marie，1883)，也为 M. 沙勒(Chasles，1793—1880)所提倡。(见[2]，p. 43.)但因为没有足够的证据证实另一个数学家海伦的存在，此说已渐被

1) 古代希腊、罗马将一夜分成几段，同中国的"更"一样，每一"更"大概是 2 小时，"五更"相当于清晨。

人们放弃. 不过在公元 900 年左右确实还有一个海伦 (Hero of Constantinople), 主要贡献是测量学和机械而不是三角形面积公式.(见[6], p.117.)

综上所述,以公元 62 年前后为海伦活动的年代是合适的。

主 要 著 作

海伦留下的著作列举如下:

1.《度量论》(Metrica), 1896 年 R. 舍内 (Schöne) 发现手抄本,1903 年由其子 H. 舍内 (Schöne) 校订出版。

2.《测量仪器》(On the dioptra),1814 年文图里 (Venturi) 校订出版意大利文版。1858 年才由 A. J. H. 樊尚 (Vincent)出版希腊文本。

3.《气体力学》(Pneumatica),最先由 F. 科曼迪诺 (Commandino, 1509—1575) 译成拉丁文出版 (1575), 希腊文本则由泰夫诺 (Thévenot) 校订出版(1693)。

4.《自动机建造技术》(On the art of constructing automata) 或《自动舞台》(The automaton-theatre),最初由 B. 巴尔迪 (Baldi) 译成意大利文出版(1589), 希腊文本收入《海伦全集》(Heronis Opera, vol. 1, 1899) 中。

5.《武器制造法》(Belopoeïca) 先后由 B. 巴尔迪(1616), 吕斯托夫 (Rüstow,1853),韦歇 (Wescher, 1867) 等人校订出版。

6. 几何学方面的著作有《定义》(Definitiones),《几何》(Geometria),《测量》(Geodaesia),《测体积学》(Stereometrica) 等。

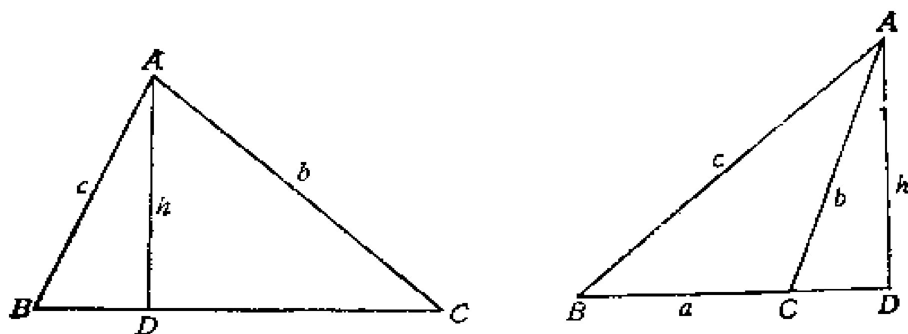
此外还有若干关于机械发明的著作.海伦的特点是多才多艺,善于博采众长。在著作中大量援引前人的成果, 如经常提到阿基米德、狄俄尼索多罗 (Dionysodorus,约公元前 2、3 世纪)、欧多克索斯 (Eudoxus)、柏拉图 (Plato,约公元前 427—约前 347 年)、埃拉托塞尼(Eratosthenes,约公元前 274—前 194 年)等.在论证中并不十分讲究传统的严格性,而是大胆地使某些经验性的近似公式.

特别注重数学的实际应用，他发明的各种精巧器械，比理论上的成就更为人们所推崇。

《度量论》内容简介

全书共 3 卷，卷 I 讨论平面图形的面积，卷 II 是立体图形的体积，卷 III 讨论将图形分成比例部分。卷 I 在序言中简要描述了几何学发展的过程，它起源于面积的度量，以后扩充到立体。欧多克索斯最先证明圆柱的体积等于同底等高的锥体的 3 倍，而阿基米德最先证明球面积是此球的大圆的 4 倍，是外切圆柱面积的 2/3。他们都是度量理论的先驱者。

接着给出一般三角形面积的计算法。设已知 $\triangle ABC$ 的三边 a，b，c，求面积有两法：第一法是先算出高，底乘高之半即面积；第二法是用“海伦公式”。



第 1 法的根据就是欧几里得《几何原本》卷 II 命题 12，13，相当于余弦定律[1)]：

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CD,$$

$\angle C$ 是锐角时，$c^2 < a^2 + b^2$，公式右端取一号，$\angle C$ 是钝角时，$c^2 > a^2 + b^2$，公式右端取十号。于是

1）有时叫做推广的勾股定理。

$$CD = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a},$$

由此算出高 h，$h^2 = b^2 - CD^2$，△面积 $= \frac{1}{2}ah$。

《度量论》卷 I 第 5、第 6 题给出的例是 a，b，c 等于 14,15,13;11,13,20。两例的高 h 都是 12，面积是整数。但有的例高不是整数。如在另一本书《几何》中，三边等于 8，4,6,从而 $CD = \frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$，$h^2 = b^2 - CD^2 = 16 - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = 8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$。值得注意的是，海伦在这里使用古代埃及人的"单分数"(unit fraction),即分子是 1 的分数，使人大惑不解。其实在希腊早已有一般分数记法，海伦本人在《度量论》中就将 $\frac{4}{164}$ 记作 $\overset{\rho\xi\delta}{\delta}$，其中 ρ,ξ,δ 分别表示 100,60,4,连起来就是 164,分子 4 写在下面，和现在的习惯恰好相反。(见[7]，p 22.) 当时是没有分数线的。下面接着将"单分数"开方，求出

$$h = \sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

(近似值)。于是面积等于 $4 \times \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = 11\frac{2}{3}$。怎样对单分数开方，又怎样得到近似值，均未说明。

海伦注意到本例先算出 h 的近似值，再乘以 $\frac{1}{2}a$，这样求出的面积，不如将 h^2 先乘以 $\left(\frac{1}{2}\ a\right)^2$ 再开方所求得的面积那么精确。

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ a\right)^2 h^2} = \sqrt{16 \times \left(8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)} = \sqrt{135}$$

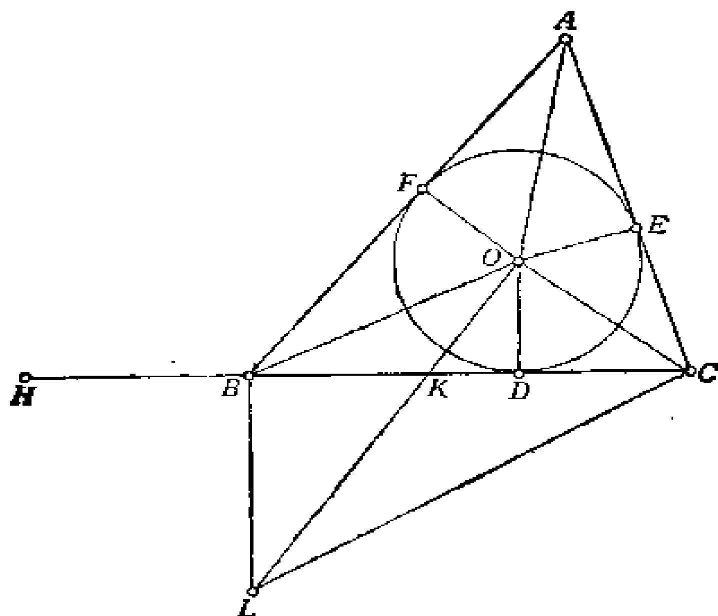
$$= 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}.$$

化为小数是 11.61904762，而$\sqrt{135} = 11.61895004$，相对误差约为10万分之1．前一种算法 $11\frac{2}{3}$相对误差(千分之4)大得多．

已知三边求三角形面积的第2种算法是用公式

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad (1)$$

其中 a,b,c 是三边，s 是半周长，$\triangle$是面积．这是有名的"海伦公式"．在卷Ⅰ的第8命题中给出几何证明如下：



作内切圆 DEF，O 是圆心，半径 $r = OD = OE = OF$．联 O 至 A,B,C，及各切点 D,E,F．则

$$\frac{1}{2}BC \cdot r = \triangle BOC,$$

$$\frac{1}{2}CA \cdot r = \triangle COA,$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot r = \triangle AOB;$$

三式相加得 $sr=\triangle$，其中 $s=(a+b+c)/2$。延长 CB 至 H，使 $HB=AF$，易知 $HC=s$。

作 $BL\perp BC$，$LO\perp OC$，二者交于 L，则 B,O,C,L 4 点共圆，于是 $\angle BLC$ 与 $\angle BOC$ 互补，但 $\angle FOA$ 也与 $\angle BOC$ 互补，故 $\angle BLC=\angle FOA$，

$$\triangle BLC\backsim\triangle FOA.$$

$$\frac{BC}{BL}=\frac{AF}{OF}=\frac{HB}{OD},$$

$$\frac{BC}{HB}=\frac{BL}{OD}=\frac{BK}{KD},\text{（更比定理）}$$

$$\frac{HC}{HB}=\frac{BD}{KD}.\text{（合比定理）}$$

由此得

$$\frac{HC^2}{HC\cdot HB}=\frac{BD\cdot DC}{KD\cdot DC}=\frac{BD\cdot DC}{OD^2},$$

于是 $$(HC\cdot OD)^2=HC\cdot HB\cdot BD\cdot DC.$$

左端是 $(sr)^2=\triangle^2$，右端 4 条线段分别等于 $s, s-a, s-b, s-c$，即相当于公式(1)。原文全用文字叙述(见[8]，p.477)，没有写成这样整齐的公式，只指出各线段的作法，如 HB 等于半周长减去 BC 等。

在证明这公式之前，先给一个例子，说明具体的算法。

设三边为 7，8，9。相加取其半，得 12，12 减去 7，余 5，同样，12 减 8 余 4，12 减 9 余 3。12乘以 5 得 60，再乘 4 得 240，再乘以 3，得 720。求 720 的平方根，即为所求面积。

720 没有有理平方根，这时要用近似算法，步骤如下：最接 720 的平方数是 729，它的平方根是 27，720 除以 27，得 $26\frac{2}{3}$，加上 27，得 $53\frac{2}{3}$，取其半。得 $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(=26\frac{5}{6}\right)$。这就是 720 平

方根的近似值。$\left(26\frac{5}{6}\right)^2=720\frac{1}{36}$，仅比720多$\frac{1}{36}$。如要取得更精确的值，可以$26\frac{5}{6}$作近似值再重复一次上述的手续。

原文没有继续演算下去，现推算如下：

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=26\frac{1609}{1932},$$

$$\left(26\frac{1609}{1932}\right)^2=720\frac{1}{3732624}.$$

化为小数，$26\frac{5}{6}=26.8\dot{3}$，与真值$\sqrt{720}=26.832815730\cdots$比较，在小数后第3位出现差异。而$26\frac{1609}{1932}=26.8328157349\cdots$在小数后第9位才出现差异。

一般说，设a_1是$\sqrt{N}$的第1近似值，则更精确的第2近似值a_2是

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{N}{a_1}\right). \tag{2}$$

海伦明确地使用这一公式，但没有给出证明。我们可以猜想他是这样推导的：

不妨设第1近似值a_1是过剩的，

$$\sqrt{N}<a_1,$$

两端乘以$\sqrt{N}/a_1$，有

$$\frac{N}{a_1}<\sqrt{N}<a_1,$$

取不足近似$\frac{N}{a_1}$与过剩近似a_1的算术平均值作a_2，便有(2)式。不

难证明 a_2 比 a_1 更接近真值。事实上 a_2 也是过剩的[1]，同时又小于 a_1(a_2 在 a_1 与不足近似值之间)，故更加接近$\sqrt{N}$。

若 a_1 是不足的，由公式(2)定义的 a_2 同样是过剩的，而且也一样比 a_1 更接近 $\sqrt{N}$。这只要注意到由$\frac{1}{2}\sqrt{N} < a_1 < \sqrt{N}$可推出$\sqrt{N} - a_1 > \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) - \sqrt{N}$ 即可。在理论上，如果 a_1 有 n 位准确数字，即误差不超过第 n 位数字的半个单位，则 a_2 的误差不超过第 $2n-1$ 位数字的 1/8。换句话说，使用(2)式一次，近似值的准确位数大约加倍，因此这一公式常称为"平方根倍位法"。

(2) 写成

$$a_2 = a_1 + \frac{N - a_1^2}{2a_1} \tag{3}$$

计算更方便，因为 $N - a_1^2$ 的绝对值很小，除以 $2a_1$ 很快就得后面几位小数。

还有一种形式是

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} \tag{4}$$

被开方数 N 改写成它的近似值（即 a_1）加上误差 b，而右端就是 a_2。

这一类公式源远流长，中国古代叫做"不加借算"，印度，阿拉伯国家也在使用，甚至可上溯到公元前一千多年的巴比伦。（见[10].）

公式(1)的证明，海伦在《测量仪器》中的第 30 题再一次给出。但根据阿拉伯数学比鲁尼(Abū'l Raiḥān al-Bīrūni,973—1050 以后)的记载，这公式是阿基米德发现的，这一点已得到公认。（见

1) 因不等式 $\frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) > \sqrt{N}$ 与$(a_1 - \sqrt{N})^2 > 0$ 等价，故恒成立.

[7], p.340.)不过海伦公式的名称已为世界各国所习用，很难再改过来。

印度婆罗摩笈多（Brahmagupta，约 598—665 以后）在 628 年给出四边形面积

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(a,b,c,d 是四边长，s 是半周长，实际只适用于圆内接四边形)，若其中一边 $d=0$，则成三角形，公式相应变成(1)。（见[9].）

我国秦九韶(约1202—1261)在《数书九章》(1247)中也独立给出与(1)等价的公式。

本卷从第 17 题开始，给出正多边形面积的计算法，边数从 3 到 12。

如正三角形，边长为 a，则面积应为 $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，海伦取 $\sqrt{3}=\frac{26}{15}=1.7\dot{3}$，这是很好的近似值，相对误差 $<0.08\%$（更好的近似值是 $\frac{71}{41}=1.73170\cdots$ 相对误差 $<0.02\%$）。 从而 $S_3=\frac{13}{30}a^2$。

后面的面积也都是近似值，除了正 5、6、8 边形较好之外，其余的近似值相当粗糙。

18 题给出正 5 边形的面积 $S_5=\frac{12}{7}a^2$。按准确面积应是

$$S_5=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2,$$
$$=1.720477a^2.$$

如将系数展开成连分数，可得渐近分数

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{12}{7},\ \frac{31}{18},\ \frac{43}{25},\ \cdots,$$

$\frac{12}{7}$ 是渐近分数之一，故是较好的选择。

另外正 6 边形(19 题)的面积 $S_6=\frac{13}{5}a^2$，正 8 边形(21 题)的面积 $S_8=\frac{29}{6}a^2$ 的选择也较好，都是连分数的渐近分数. 但正 7，9，10，11，12 边形的面积，近似分数的选择都不佳. 正 n 边形面积记作 S_n，列举如下：

$$S_7=\frac{43}{12}a^2,\ S_9=\frac{51}{8}a^2,\ S_{10}=\frac{15}{2}a^2,$$

$$S_{11}=\frac{66}{7}a^2,\ S_{12}=\frac{45}{4}a^2.$$

以正 7 边形为例核对一下. 准确值是 $S_7=a^2\cdot\frac{7}{4}\text{ctg}\frac{180^\circ}{7}=3.633912444a^2$，将系数化为连分数，其渐近分数序列是：$\frac{3}{1}=3$，$\frac{4}{1}=4$，$\frac{7}{2}=3.5$，$\frac{11}{3}=3.\dot{6}$，$\frac{29}{8}=3.625$，$\frac{40}{11}=3.\dot{6}\dot{3}$(误差 0.00245)，$\frac{109}{30}=3.6\dot{3}$(误差 0.000579)，…

海伦给出的公式是 $S_7=\frac{43}{12}a^2$，$\frac{43}{12}=3.58\dot{3}$，误差 0.05079，比 $\frac{40}{11}$ 的误差大得多，比 $\frac{29}{8}$ 的误差(0.008912)也大得多，甚至比 $\frac{11}{3}$ 的误差(0.03275)都大.

正 9 边形准确值 $S_9=6.181824194a^2$，海伦公式 $S_9=\frac{51}{8}a^2=6.375a^2$，系数误差 0.193175，相对误差达3%以上，如取 $S_9=\frac{37}{6}a^2=6.1\dot{6}$，误差为 0.0151575，相对误差仅为 0.25%.

10，11，12 边形的选择同样也是不好的. 由此可知海伦在多边形计算方面顶多是因袭了前人(猜想是希帕霍斯)相当粗略的弦

表，而没有在理论上加以改进。

《度量论》卷 II 讨论立体图形体积。如描述一种“小祭坛 (little altar)”，在现在立体几何中属于“拟柱体” (prismatoid)，上下底是长方形，不必相似，但对应边平行。在日常生活中很常见，如煤场的煤堆，盐滩上的盐坨，铁路旁的碎石堆等，可名为“长方台”[1] 设上底的长、宽为 a', b'，下底的长、宽为 a, b，高为 h，书中给出体积

$$V = \left[\frac{1}{4}(a + a')(b + b') + \frac{1}{12}(a - a')(b - b')\right]h,$$

这是正确的。更简单的形式是

$$V = \frac{h}{6}(2ab + ab' + a'b + 2a'b').$$

其余的公式多为前人所知。

卷 III 讨论将图形分割成已知比，基本上采自阿基米德的工作。

其 他 工 作

《测量仪器》是海伦另一本代表作。其中描述一种仪器，功能类似现代的经纬仪。接着介绍如何使用这种仪器去解决各种测量问题。如(1)挖一个隧道，从山的两侧开始，找准方向，使隧道准确会合；(2)确定两点之间高度的差；(3)测量可望而不可即的两点间的距离；(4)测沟渠的深；还有各种高度和距离的测量问题，包括利用同时看到同一次月食，算出罗马和亚历山大之间的距离。本书最后叙述如何用齿轮的结构，用一个给定的力去移动给定的重物。

海伦还有各式各样的发明。最有名的是“汽转球” (aeolipile)，这字的拉丁文是 aeolipilae，由 Aeolus (源出于希腊文 *Aἴολος*,

---

1) 中国古代对这种立体非常重视，有多种专名，如刍童，盘池、冥谷等。

神话中的"风神")和 pila (原意为"球"，或来自希腊文 $\pi\acute{\upsilon}\lambda\eta$，原意是"门")合成，可直译为"风神之球"或"风神之门"。主要的结构是一个封闭的容器(如球或圆柱)，安装在中空的旋转轴上，球的两侧(在与轴垂直的平面上)各装一个或几个喷射弯管，蒸汽由轴的孔道进入球内，经弯管喷出，因反作用力使球旋转。常被称为世界上第一个蒸汽机。不过当时的生产力低下，没有用作实际机械动力，只被看作一种高级玩具，或用于显示"神力"的装置。如信徒们在祭坛上烧纸，容器内放出的蒸汽驱动神殿的门自动开启，使信徒们大吃一惊。

他还创造一种虹吸管，一种"自动售货机"，即"投入一枚硬币即自行开动"(penny-in-the-slot) 的机器，灭火器，水风琴，水钟等等，简直多不胜数。他还写过《反射光学》(catoptrica)，发展了欧几里得的几何光学，但同时也接受了传统的错误观点：视觉的产生是因为眼睛发出了某种射线被物体反射回来。

总之，海伦有很多创造发明，给后人极大的启发，在世界技术史上占有崇高的地位。数学方面，虽然对纯理论没有重大的推进，论证有时是欠严格的，但善于运用已有知识去解决实际问题。

文　　献

原始文献

[1] Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, 5 vols. Leipzig, 1899—1914.

研究文献

[2] F. Cajori, A history of mathematics, Macmillan Company, 1919.
[3] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, II 1921.
[4] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Company, I 1923.
[5] O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity, Brown University Press, 1957.
[6] W. W. R. Ball, A short account of the history of mathematics, Dover Publications, 1908.
[7] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.
[8] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, II 1957.

[9] T. A. Sarasvati Amma, Geometry in ancient and medieval India, Motilal Banarsidass, Delhi, 1979.

[10] 李俨，中算家的平方零约术，中算史论丛(一)，科学出版社，1954。

尼科马霍斯

梁 宗 巨
（辽宁师范大学）

尼科马霍斯（Nicomachus of Gerasa） 公元100年前后活跃于杰拉萨。数学、和声学。

尼科马霍斯是杰拉萨（Gerasa）人，这是从他自己的手稿和卢西恩(Lucian，约公元120—180年)[1]的著作中得知的。杰拉萨现称为杰拉什（Jerash），属约旦，位于首都安曼（Amman）之北约35公里。他生存的年代可根据以下的记载推测出来。在他的《和声手册》(Manuale harmonicum）中提到斯拉西勒斯（Thrasyllus）[2]，这个人生存于古罗马第二代皇帝提比略（Tiberius，公元前42—公元37年，公元14—37年在位)时代。 又按 F. M. A. 卡西奥多拉斯(Cassiodorus，约公元490—585年)[3]的记载，L. 阿普利斯(Apuleius，约公元124—170年以后)[4]曾将尼科马霍斯的《算术入门》(Introductio Arithmetica）译成拉丁文。在卢西恩的书中，借一个人物的口说："你的计算和尼科马霍斯一样"。这说明在卢西恩时代，尼科马霍斯已是一位著名的人物。另一方面，在尼科马霍斯所有的著作中都没有提到赛翁（Theon of Smyrna)[5]，而两人

1）希腊修辞学家和讽刺作家，以修复在罗马统治下的希腊文学著作而闻名。
2）占星术家，又写过音乐方面的著作。
3）罗马政治家、作家。
4）北非的哲学家，修辞学家，著作甚丰，曾在罗马教授修辞学。罗马皇帝安东尼·庇护（Antoninus Pius，公元138—161年在位)时代的人。
5）罗马皇帝 P. A. 哈德良（Hadrianus，公元117—138年）时代的人。原籍士麦那（Smyrna），即今土耳其西岸的伊兹密尔（Izmir）。

的算术著作颇有相似之处．由此推知尼科马霍斯活跃于公元 100 年前后。

他晚于毕达哥拉斯好几百年，但在哲学思想和数的理论方面都继承了毕达哥拉斯学派的衣钵．实际上这个学派的算术成果以及数的神秘观点在尼科马霍斯的著作中才得到较全面的反映，而这学派成员自己的著作却因保密的清规戒律很少传播开来．尼科马霍斯从杰拉萨来到亚历山大，学习和整理这个学派的学说，企图恢复毕达哥拉斯精神，他们被称为新毕达哥拉斯学派．(见[3]，vol. I，p. 128.)

尼科马霍斯只有两本著作完整地流传下来，一本是《算术入门》一本是《和声手册》．另一本《算术神学》(Theologumena arithmeticae）保存了大部分，这书阐述了数的神秘性质，从中可以看到他和毕达哥拉斯学派的哲学思想．此外还可能有音乐、几何、人物(毕达哥拉斯、阿波罗尼奥斯等)传记等方面的著作，某些摘要尚残存，但不能确知是否出自他的手。

《算术入门》是他的代表作，现存的本子也许只是摘要或节录．原文是希腊文，早期阿普利斯的拉丁文译本已失传，现存最好的本子是 R. 霍歇 (Hoche) 校订的"Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis arithmeticae libri II"(《杰拉萨人、毕达哥拉斯派的尼科马霍斯算术入门二卷》)([2])．最流行的英译本是 M. L. 杜奇 (D'Ooge) 的 "Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic"(《杰拉萨的尼科马霍斯算术入门》)[1]，附有 F. E. 罗宾斯 (Robbins)、L. C. 卡平斯基 (Karpinski，1878—1956)撰写的希腊算术研究，系统介绍了尼科马霍斯前后希腊算术的发展情况，对他的生平及著作也作了详细的考证，还用很大的篇幅去论述他的哲学思想。

---

1) 1926 年初版，1946 年三版，Ann Arbor 出版．此译文又收入 R. M. Hutchins 主编的 Great books of the western world, vol. 11 (1952) 中.

希腊时代的“算术”，和现在的含义不完全相同。从毕达哥拉斯开始，关于数字的加、减、乘、除等运算叫做“λογιστική”，转成拉丁文“logistica”（英文“logistic”），可译作“计算的技术”。而“算术”的希腊文是“ἀριθμητική”，出自“ἀριθμός”（数）和“τέχνη”（技术），指“数的理论”或“数的哲学”，转成拉丁文“arithmetica”（英文“arithmetic”），大致相当于现在的“数论”。

尽管“logistica”被看作一门独立的学科，但希腊人却没有给我们留下这方面的著作。欧几里得在《几何原本》中用三卷（VII—IX）的篇幅来讨论算术，卷X无理量也可以划人算术的范围。此书完全用几何的方式来叙述。欧几里得以后的数百年间，希腊数学几乎被几何学所垄断，算术的进展缓慢。埃拉托塞尼（Eratosthenes，约公元前276—前195年）发明“素数筛子”，许普西克勒斯（Hypsicles，约公元前175年）讨论多角数及等差数列，以补《几何原本》的不足。这是这一时期仅有的、值得称道的算术工作，此后的二百多年，在尼科马霍斯之前，算术仍无实质性的进步。

尼科马霍斯《算术人门》是一本真正摆脱几何形式的算术，它影响后世达一千多年之久。在历史上，它对算术的重要性可以和《原本》对几何的重要性相媲美。但在论述的方式上却和《原本》大异其趣。《人门》所讨论的数量全用具体的数字来表示，而《原本》则用线段来把数量形象化。《人门》提到一般的数量均用文字来表述，《原本》则用字母 A 或 AB 来表示。欧几里得以严谨的逻辑论证见长，而尼科马霍斯只满足于具体数字的说明，全书没有欧几里得式的证明，因此有时会导致以偏概全，误将特例当作一般的规律。最明显的例子是《人门》下卷第38章第3段关于“反调和比例”的论述。（见[7]，p. 98.）就这一点而论，他比欧几里得大为逊色。这书还掺杂大量的哲学和神学的内容，也许它正是为哲学家和神学家而不是数学家而写的。

不管怎样，《人门》在当时仍然是最受欢迎的算术书。稍后虽有赛翁（约125）类似的算术，但没前者那么有系统，因而影响较小。《人门》的注释者很多，除阿普利斯的拉丁文译本外，先后有伊

安布利霍斯（Iamblichus，约公元 250—约 330 年）、赫伦纳斯（Heronas）、阿斯利皮厄斯（Asclepius of Tralles，6 世纪）、J. 菲洛庞纳斯（Philoponus，6，7 世纪）、普罗克洛斯（Proclus）等。最重要的译本是 A. M. S. 博伊西斯（Boethius，约公元 475—524 年）[1]的拉丁文译本《博伊西斯算术原理二卷》（Boetii de institutione arithmetica libri duo）[2]，这书大体上是《入门》的意译本，偶然也压缩原著某些部分或增加一些内容，但实质上没有新的东西，反而把原书的精采部分删掉了。这是一个数学的贫乏时代，希腊数学通过罗马人传到中世纪欧洲的寥寥无几，大部分体现在博伊西斯的著作中。这个译本由于取材与编排便于初学者接受，基本上能满足一般的需要，后来在西欧的修道院学校用作这一科目的权威教本竟达一千年以上。

《算术入门》的内容简介如下。（见[1].）

全书分两卷，上卷 23 章，下卷 29 章。上卷前 6 章阐述算术在哲学上的重要性，在思想上直接继承毕达哥拉斯的观点，指出只有通过数学才能认识宇宙的奥秘。当年毕达哥拉斯将一切学问分为算术、音乐、几何、天文四科，后来叫做“四道”（quadrivium），在《入门》中称为“四法”（四种方法），尼科马霍斯认为算术是四法之首。上卷第四章写道：

> 四法中哪一种必须最先学？显然应该是最先存在的、最原始的和最根本的，它是一切学术之母，这就是算术。这不仅仅是因为它在上帝的心中先乎其他一切而存在，被造物主奉为圭臬，依赖它使所创造的万物井然有序并达到应有的目标；而且还因为它若不存在，其他科学也就不会存在，但反过来，其他科学即使被取消，算术却仍能存在。正像“动物”先行于“人”一样，“动物”不存在，

1）罗马哲学家，中世纪经院哲学奠基人之一。被控谋反入狱，后被处死。教会宣称他是天主教的殉道者，从此他的书便身价百倍，长期用作僧侣学校的读本。

2）此书最后的版本是 1521 年巴黎印刷本，近代有弗里德莱因（G. Friedlein）的校订本（1867，莱比锡）。

"人"自然不会存在，而"人"不存在，不足以使"动物"不存在。

第 7 章以后讨论数的分类。先将数分为奇数、偶数，再将偶数分为(1)偶偶数，用现代符号写出是 2^n，(2)偶奇数，即 $2(2n+1)$，(3) 奇偶数 $2^{m+1}(2n+1)$。奇数也分为三类：(1)素数与非合数；(2) 次素数 (secondary) 与合数，该数是若干素因子之积；这两类数都不包括2，因为 2 不是奇数；(3) 本身是次素数与合数，但与别的数互素；这种分类既不方便也不符合分类规则((2)，(3)是重叠的)，故不为后世所沿用。

第 13 章用文字叙述埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的"素数筛子"，以及欧几里得"辗转相除"求最大公约数的方法，如果最大公约是 1，则两数互素。

第 14—16 章讨论完全数，对于正整数 a，如果小于 a 的因数(包括 1)之和恰好等于 a，则 a 叫做完全数。如果这个和大于 a，a 叫做过剩数，如果和小于 a，称 a 为亏数。过剩数的例子有 12，$12<1+2+3+4+6$，亏数的例子有 8，$8>1+2+4$。第 16 章指出 4 个完全数：6，28，496，8128。毕达哥拉斯已经知道前两个，而第 5 个[$2^{12}(2^{13}-1)=33550336$]直到 1456 年才被发现。(见[8]，p.6)

接着是第 17—23 章，比较数的大小。尼科马霍斯作了非常冗长烦琐的分类。设有 a, b 两数，$a>b$，即 $\frac{a}{b}>1$。根据两者的关系，分为 5 大类，每一类又分为若干类，各给予专门的名称，而其倒数 $\frac{b}{a}<1$，也相应地有各种名称。这些名称太复杂，实际上限制了它的推广使用，在历史上成为昙花一现，例如：

$$\frac{b}{a} \text{ 具有 } \frac{n}{mn+1} \text{ 的形式时}$$

叫做"ὑποπολλαπλασιεπιμόριος"，译成拉丁文"submultiplex superparticularis"。(见[7]，p. 103.)

在第19章中给出和现在一样的乘法表，不过不是九九表而是十十表（1—10 各数乘 1—10 各数）.第 23 章给出上述这些类型的数的某些性质.

下卷前几章讨论具有各种比的数的一些性质. 例如，设 a,b,c 是递增的等比数列，公比是 n，则 $a, b-a, c+a-2b$ 也是等比数列，且公比是 $n-1$.

从第 6 章开始论述多角数，指出构成的方法及各种性质. 第 13 章将平面多角数推广为立体数，首先是棱锥数，棱锥的底可以是三角数，平方数或其他的多角数. 进一步推广为截棱锥数，又分为截去顶上一层、二层或三层等等. 对以上这些数列的性质，书中没有给出一般公式，也没有普遍证明. 毕达哥拉斯研究多角数，是结合图形来说的，尼科马霍斯则完全脱离几何图形，只是借用了几何的一些名称. 这些数列现在可以完全归入高阶等差数列的范围.

第 20 章最后提出一个有趣的问题：观察奇数数列

$$1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,\cdots$$

可知第 1 项是 1 的立方，其次 2 项之和是 2 的立方，再其次 3 项之和是 3 的立方，照此类推. 即

$$1=1^3$$

$$3+5=2^3$$

$$7+9+11=3^3$$

$$13+15+17+19=4^3$$

$$\cdots\cdots$$

我们不难推出它的一般公式：

$$[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\cdots+[n(n-1)+2n-1]=n^3.$$

由此很容易导出自然数立方和的公式：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

这一关系可能尼科马霍斯已经知道（见[4]，p. 68），后来阿

拉伯数学家凯拉吉（al-Karaji 或 al-Karkhi，10世纪末、11世纪初）在他的名著《发赫里》（al-Fakhri）中用几何图形证明了它。

第 21 章以后探讨算术级数、几何级数、调和级数及中项的种种性质。第 28 章将这三种古已有之的级数加以推广。

设 a,b,c（$a>b>c$）成调和级数，则

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a} \text{ 或 } \frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$$

最后的式子叫做调和比例。如将右端分子分母颠倒过来，

$\frac{a}{c}=\frac{b-c}{a-b}$ 叫做"反调和比例"（subcontrary to harmonic）或"第 4 种比例"。仿此，还可以作出多种比例，如

$$\frac{b}{c}=\frac{b-c}{a-b} \quad \text{第 5 种比例，}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{b-c}{a-b} \quad \text{第 6 种比例，}$$

………

$$\frac{b}{c}=\frac{a-c}{a-b} \quad \text{第 10 种比例。}$$

各种比例都给出具体的例子。如 6，5，3 就有第 4 种比例的关系，尼科马霍斯接着写道："我们应当知道它（第 4 种比例）的特点：大项乘中项之积是中项乘小项的 2 倍。此处 $6\times5=2\times5\times3$。"

这一论断是错误的，因为并不是所有符合第 4 种比例的 3 个数都有这种性质。事实上，ab 可以是 bc 的任意倍（即 a 可以是 c 的任意倍）。设 $a=mc$，代入第 4 种比例式，得

$$\frac{mc}{c}=\frac{b-c}{mc-b}, \quad (m^2+1)c=(m+1)b,$$

令 $a=m^2+m, b=m^2+1, c=m+1$（$m\geqslant2$），则 a,b,c 符合第 4 种比例，而 $ab=mbc$。$m=2$ 时，得到 6，5，3 的特例。

综上所述，《算术入门》系统地总结了自毕达哥拉斯以来的算术研究，摆脱几何形式，开辟了希腊数学的新途径。此后算术取代

几何，在亚历山大成为人们瞩目的中心。

尼科马霍斯还有一部《和声手册》传下来，这部书综合了毕达哥拉斯派和阿里斯托赛诺斯（Aristoxenus）[1]派的音乐理论。第1章是引言，2—4章论述音调，接着的5章讲音阶，第10章在拉紧的弦的基础上讨论调节音的原则。第11章将一韵扩充为二韵的全音阶。最后一章重新陈述音调、音程、半音阶（chromatic）、等音（enharmonic）等。此书有F. R. 莱文（Levin）的英译注释本"Nicomachus of Gerasa, Manual of harmonics"（《杰拉萨的尼科马霍斯，和声手册》）[2]

文　献

原始文献

[1] Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic, University of Michigen Press, 1938.

[2] R. Hoche, ed., Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II, Leipzig, 1866.

研究文献

[3] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Company, I 1923, II 1925.

[4] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics. Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[5] L. C. Karpinski, The history of arithmetic, Rand McNally & Company, 1925.

[6] F. Cajori, A history of mathematics, Macmillan Company, 1919.

[7] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, I 1921.

[8] L. E. Dickson, History of the theory of numbers, Chelsea Publishing Company, I 1952.

1) 生于公元前375－360年之间，希腊音乐理论家，亚里士多德的门徒，著《和声基础》(Elements of Harmony)、《节奏基础》(Elements of Rhythm)等书。

2) 1967年哥伦比亚大学出版。

门 纳 劳 斯

梁 宗 巨

（辽 宁 师 范 大 学）

门纳劳斯（Menelaus of Alexandria） 公元100前后活动于亚历山大及罗马．几何学、三角学、天文学．

托勒密在《天文集》中记载了门纳劳斯的两次天文观测，时间是公元98年．普卢塔克（Plutarch，约公元46—119年以后，希腊传记作家）在书中描述另一个人和门纳劳斯对话，时间约当公元75 年以后，地点是在罗马或其附近．帕波斯和普卢塔克都称他为亚历山大的门纳劳斯．除此以外，对门纳劳斯的生平便一无所知．

托勒密所记载的两次观测一次是月亮掩 （occultation）角宿一（Spica，室女座 α），另一次是对比古代的记录，门纳劳斯再度证实希帕霍斯发现的岁差现象的存在．

在阿拉伯学者伊本纳迪姆（Ibn al-Nadim，10 世纪下半叶）的《数学家名录》（Fihrist）中，列举了门纳劳斯的著作：《球面命题篇》（The book on spherical propositions）；《不同物体的重量与分类知识》（On the knowledge of the weights and distribution of different bodies）；《几何原理》（Elements of geometry），此书为塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra，约 826—901）所校订；《三角形篇》（Book on triangle）等．

又有一些阿拉伯学者推断门纳劳斯曾编过星表．而帕波斯说他写了一部关于黄道十二宫（Signs of zodiac）降落的著作．两个半世纪以前，他的前辈希帕霍斯写过黄道十二宫的升起，没有涉及降落的情形，门纳劳斯弥补了这一不足．讨论恒星的升降，需要

掌握三角学的知识，门纳劳斯对此是游刃有余的。

门纳劳斯诸多著作之中，只有《球面学》(Sphaerica) 以阿拉伯文译本的形式流传下来，其余的均已失传。译者是伊沙格 (Isḥāq ibn Ḥunain, ?—910年)[1]或他的父亲胡奈因(Ḥunain ibn Isḥāq, ?—877年)。以后有几种校订本，著名的有曼苏尔(Manṣūr ibn ʿIrāq, 1007 或 1008)的修订本，现藏在莱顿大学图书馆，称为 930 号莱顿抄本 (Codex Leidensis 930)。后来杰拉德(克雷莫纳的) (Gerard of Cremona, 约 1114—1187)[2]将此书从阿拉伯文译成拉丁文。而最早出版的拉丁文本是毛罗利科 (Francesco Maurolico, 1494—1575)本(1558 年在墨西拿出版)，他所依据的手稿是不完整的，而且加入自己的见解，因此可靠性较差。另外又有 E. 哈雷 (Halley, 1656—1743) 本，他参考了阿拉伯文及希伯来本，自己并作了一些数学处理 (1758 年出版于牛津)。当前较完整的现代语版本是 A. A. 布约恩博 (Björnbo) 的德文译本([1])，他主要根据哈雷本及 930 号莱顿抄本。以后又有 M. 克劳泽 (Krause) 的德文译本([2])作了 修正及补充(1936 出版)，这是研究门纳劳斯的两种基本文献。

《球面学》是门纳劳斯的精心杰作，因此书门纳劳斯被尊称为"三角学的奠基者"，而且是第一个使三角学脱离天文学，成为独立学科的人。

全书共 3 卷，卷 I 开宗明义就给出球面三角形的定义："在球面上由大圆弧所包围的部分"，又限定"这些弧都小于半圆"。这是世界上第一次对球面三角形的明确表达。写作的体例虽然仍遵循希腊的传统，但不拘泥于从最原始的定义出发，如球面上的点、极点、小圆、大圆等，而是直截了当指明要讨论的对象。前人已给出的概念和命题，此处作为已知来使用。

根据帕波斯的记载，门纳劳斯称球面三角形为"三边形" (tbr-

---

1) 他是著名的翻译家，将亚里士多德、欧几里得、阿基米德、托勒密等大量的希腊名著译成阿拉伯文。

2) 12 世纪时大量希腊名著从阿拉伯文译成拉丁文，杰拉德是四大翻译家之一。

ee-side)，以区别于平面几何中的三角形（triangle）.（[3]，II，p. 262.）按阿拉伯文版本，他在献给某一位王子时宣称："我发现了一种极好的推理证明方法。"这是可信的，球面三角的许多重要内容，都是门纳劳斯的独创。

卷I的主要内容是比较球面与平面这两种三角形的异同，力图平行于欧几里得《几何原本》，建立相应的球面三角形命题。他尽量采用直接证法而避免用归谬法，有些命题的证明及讨论比《原本》更全面，因为《原本》中某些情形是有意留给读者自证的。

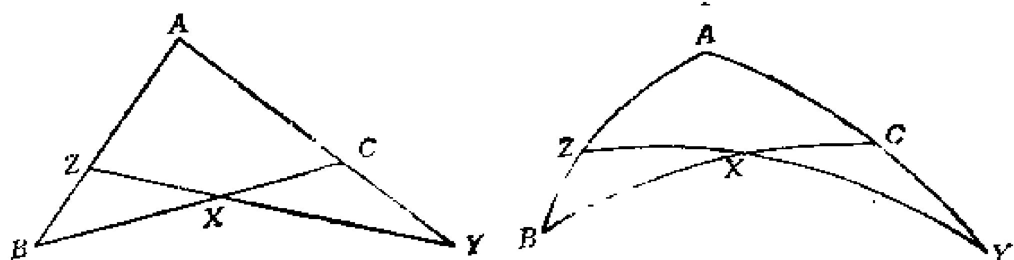
他给出与平面三角形类似的若干命题之后，也指出两者的差异。如球面三角形三内角之和并不等于两直角而是大于两直角。两平面三角形如各角对应相等只是相似而不一定全等，但两个球面三角形若各角相等则必定全等(或对称)。这是球面同平面明显的区别。

卷II没有多少新鲜的内容，只是建立一些对天文学有用的命题，一般不超出西奥多修斯（Theodosius of Bithynia，公元前2世纪下半叶)《球面学》（Sphaerica）的范围，有些是加以推广，证明通常是冗长的。

卷I、卷II只牵涉到球面几何，卷III才正式开展球面三角学的论述。第1个命题就是球面的"门纳劳斯定理"。现今在平面几何及射影几何中有平面的"门纳劳斯定理"，一般表述为：设X，Y，Z分别是$\triangle ABC$三条边BC，CA，AB或其延长线上的点，则此三点共线的充要条件是

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

这命题不是门纳劳斯的发明，前人早已知道，它也许载在欧几里得已失传的《推论集》(Porisms）中。门纳劳斯在这里是作为已知来使用的。他自己所证明的是这命题在球面上的推广：设X，Y，Z分别是球面三角形ABC三条边BC，CA，AB或其延长线上的点，则此三点共大圆的充要条件是：



$$\frac{\sin XB}{\sin XC}\cdot\frac{\sin YC}{\sin YA}\cdot\frac{\sin ZA}{\sin ZB}=1.$$

以上是用现代的术语和符号来表达的，当时还没有三角函数，只有希帕霍斯的弦表，就是不同圆心角所对弦长的表，相当于现在圆心角之半的正弦线的两倍。门纳劳斯大概也造过这样的表。他用弦长来表示前面的关系式，实质上和正弦一样。

这定理称为“门纳劳斯定理”是名正言顺的，由于平面的情形不知出处，后人就一并称之为“门纳劳斯定理”。它的另一种提法(平面情形)是：设一直线与三角形的三条边或其延长线相交，将三条边分(内分或外分)为六条线段，则三条没有公共端点的线段之积，等于另外三条线段之积。球面情形也有类似的说法，因为关系到六个量，在中世纪时常称为“六量律”(regula sex quantitatum)。在托勒密《天文集》中，对平面及球面的情形都作了详细的证明。([4]，II，pp 446—463.)

门纳劳斯从这个定理导出很多有用的结果。如命题2证明了两个球面三角形 ABC 与 $A'B'C'$，若 $A=A'$，$C=C'$ (或C与C' 互补)，则

$$\frac{\sin c}{\sin a}=\frac{\sin c'}{\sin a'}$$

(依习惯，A,B,C 角所对的边分别记作 a，b，c)特别是C与 C' 都是直角时，后来被称为“四量律”(regula quattuor quantitatum)，在阿拉伯三角学中占有重要的地位。

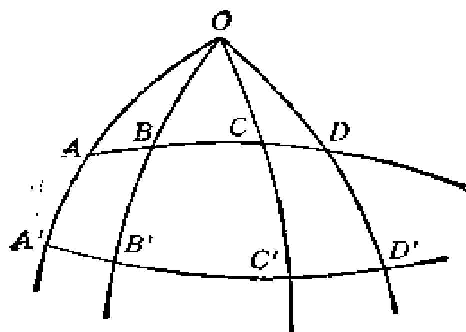
命题5证明：若球面三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 的 C，C' 是直角，$B=B'$，又 a,a' 都小于$90°$，则

$$\frac{\sin(c+a)}{\sin(c-a)}=\frac{\sin(c'+a')}{\sin(c'-a')},$$

可以由此导出(推导见[6], I, p.18.)

$$\frac{\sin(c+a)}{\sin(c-a)}=\frac{1+\cos B}{1-\cos B}$$

它等价于 $\cos B = \mathrm{tg}\, a \cdot \mathrm{ctg}\, c$。这是解球面直角三角的基本公式之一。



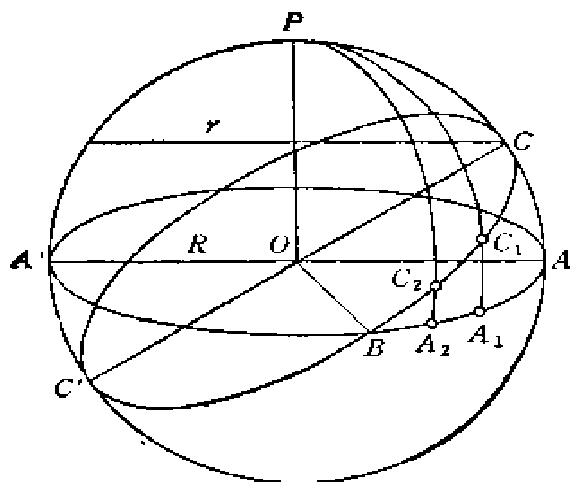
在证明上述命题的过程中，门纳劳斯应用了非调和比(交比)的性质：通过 O 点有 4 条大圆弧 OAA', OBB', OCC', ODD', 被任意两条大圆弧 $ABCD$, $A'B'C'D'$ 所截，则

$$\frac{\sin AD}{\sin DC}\cdot\frac{\sin BC}{\sin AB}=\frac{\sin A'D'}{\sin D'C'}\cdot\frac{\sin B'C'}{\sin A'B'}.$$

在平面上，有这样的定理：过一点的 4 条直线与任一截线的 4 个交点的非调和比(即交比)与该截线的位置无关。推广于球面就有上面的关系，只要将直线变成大圆弧，线段变成圆弧的正弦即可。

还有好几个可以和平面类比的命题。如命题 6：平分球面三角形 ABC 顶角 A 的大圆弧交 BC 于 D，则

$$\frac{\sin BD}{\sin DC}=\frac{\sin AB}{\sin AC}.$$



命题 11 以后，又转到和天文有关的问题上去。以最后的命题 15 第一部分为例：

设 BA, BC 是大圆弧的一个象限，P 是 BA 的极点。PA_2, PA_1 是过 P 点的象限弧，交

BC 于 C_2, C_1，R 是球半径，r, r_1, r_2 分别是过 C, C_1，C_2 三点的小圆（平行于大圆 $A'BA$）半径，则

$$\frac{\sin A_1A_2}{\sin C_1C_2}=\frac{Rr}{r_1r_2}.$$

这公式自然可以用来解决天球上各种圈（如赤道、黄道、白道等）之间的关系。

可以肯定，门纳劳斯已经掌握了球面三角学的基本原理。此外，他还研究过力学问题（据阿拉伯文献），写过《几何原理》，发现一种"奇特曲线"（the paradoxical curve），但都已失传。

文　献

原始文献

[1] Axel Anthon Björnbo, "Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen," in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, 40(1902), pp. 1—154.

[2] Max Krause, "Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alī b. 'Irāq mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern", in Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Phil.-Hist. Klasse, 3rd ser., no. 17 (1936).

研究文献

[3] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[4] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, 1957.

[5] A. Rome, "Les explications de Théon d'Alexandrie sur le théorème de Ménélas", in Annales de la Société scientifique de Bruxelles, ser. A, 53, pt. 1 (1933), pp. 39—50.

[6] Anton von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig, 1900—1903.

丢　番　图

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

丢番图（Diophantus of Alexandria）　公元 250 年前后活跃于亚历山大．数学．

丢番图生存的年代，是根据下面的记载来确定的．在他的著作《多角数》(De polygonis numeris）中，引用了许普西克勒斯（Hypsicles of Alexandria，约公元前 175 年)关于多角数的定义，而赛翁（Theon of Alexandria）的书又引用丢番图的著作．这样界定的上、下限是公元前 175 年到公元 390 年．另外，M. C. 普赛勒斯（Psellus，1018—约 1078)[1]写过一封信，提到阿纳托利厄斯（Anatolius，约 公元 280 年)[2]将他所著的关于埃及计算方法的小册子献给丢番图，因此两人应同时代或丢番图稍早[3]．据此断定丢番图的活跃时期是公元 250 年前后．

丢番图将他的杰作《算术》（Arithmetica）献给迪奥尼修斯（Dionysius)．历史上用这一个名字的有好几个，估计这一个是亚历山大的迪奥尼修斯，他是当地的主教．在任主教(公元 247 年)之前，曾在那里建立基督教学校(从公元 231 年起)．丢番图的《算术》可能就是为这些学校编写的教科书．这种推想是合情合理的，年代也和前面所说的一致．

关于丢番图的生平，还有一则别开生面的记载．在一本《希腊

1）拜占庭的哲学家、政治家，曾任首相．

2）劳迪塞亚（Laodicea，在今土耳其西部)的主教．

3）见 P. 唐内里（Tannery，1843--1904）校订的《丢番图全集》(1893—1895)，即文献[1]．

诗文选》(The Greek anthology)[1] 中，收录了丢番图奇特的墓志铭(见[7]，p.512)：

坟中安葬着丢番图，
多么令人惊讶，
它忠实地记录了所经历的道路。
上帝给予的童年占六分之一，
又过十二分之一，两颊长胡，
再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛。
五年之后天赐贵子，
可怜迟到的宁馨儿，
享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓。
悲伤只有用数论的研究去弥补，
又过四年，他也走完了人生的旅途。

这相当于方程

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

$x=84$. 由此知他享年 84 岁.

丢番图的著作

确实知道他有两种著作，一是《算术》，大部分保存了下来；另一种是《多角数》，只有少部分留下来．还有两种书，一是《推论集》(Porismata) 它只是在《算术》中几次提到，可能是若干数论问题的汇编，独立成册，也可能是附属在《算术》中的失传部分． 此外，伊安布利霍斯 (Iamblichus，约公元 250—约 330 年)所著《尼科马

1) 这是公元 500 年前后的遗物，大部分为语法学家梅特罗多勒斯 (Metrodorus) 所辑，其中有 46 首和代数问题有关的短诗 (epigram)．这里所引的是第 126 题．

翟斯《算术》评注》一书的注释者还提到丢番图另外一本书《分数算法》(Moriastica),它记载了分数计算的法则,可惜已失传.

丢番图的《算术》是一部划时代的著作,它在历史上影响之大可以和欧几里得《几何原本》(Elements)一比高下.这书的序中说,全书共分13卷.(见[7] p. 517.)可是现在见到的希腊文本只有6卷.长期以来,大家都认为其余的7卷早在10世纪以前已经失传.5世纪时希帕提娅(Hypatia)注释这部书,只注了6卷,也许这正是其余部分被人忽视终致失传的原因.(见[8], p. 449.)

近年来,发现4卷阿拉伯文本,改变了传统的看法.1973年,G. 图默(Toomer)获悉在马什哈德圣地(Mashhad Shrine)[1]图书馆有一本阿拉伯文手抄本,经过研究,确认为《算术》的失传部分(但还不全).这是由古斯塔伊本卢加(Qusṭā ibn Lūqā,活跃于860年前后)译成阿拉伯文的.后来J. 塞夏诺(Sesiano)将它译成英文并加以详细注释(见[6]).经过反复推敲,塞夏诺指出这4卷在《算术》中原来的位置应该是紧接着希腊文本卷1,2,3的卷4,5,6,7,而希腊文的其余部分应是卷8,9,10.下面将按这新的顺序编排来介绍它的内容.

原来的6卷希腊文本,最初是J. 雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,1436—1476)发现的.1464年2月15日,他写信给L. 比安基(Bianchi),提到他在威尼斯找到了丢番图的《算术》,从此西方学术界才知道有6卷希腊文手抄本流传下来.最早的拉丁文译本是G. 克胥兰德(Xylander,1532—1576)的"Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex, et de numeris multangulis liber unus"(《亚历山大的丢番图算术6卷,多角数1卷》)[2].以后又有C.-G. 巴歇(Bachet de Méziriac,1581—1638)校订注释的希腊-拉丁文对照本"Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus"(《亚

1) 马什哈德是伊朗东北部城市,是伊斯兰教什叶派的圣地(Shiite Shrine).

2) 1575年在巴塞尔(Basel)出版.

历山大的丢番图算术 6 卷，多角数 1 卷》)[1]. 关于这个译本，有一段饶有趣味的历史. 1637 年左右，P.de费马(Fermat, 1601—1665)读到这译本第 2 卷第 8 题:"将一个平方数分为两个平方数"时,在书页的空白处写出了著名的"费马大定理".

1670 年费马的儿子 S. de 费马 (Fermat) 将他父亲的全部批注插入正文,重新出版巴歇的希-拉对照本[2]. 近代,不包括新发现 4 卷的"丢番图全集",标准的版本是 P 唐内里(Tannery,1843—1904, 法国数学史家) 编辑、校订的希-拉对照本 "Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis" (《亚历山大的丢番图全集, 包括希腊文注释》).[3] 最流行的英译本是 T. L. 希思 (Heath, 1861—1940) 的 "Diophantus of Alexandria, A Study in the history of Greek algebra (《亚历山大的丢番图,希腊代数学史研究》).[4]此外, 还有德、法、英、俄及现代希腊语等多种译本。

代数学的特征

希腊时代"算术" (arithmetica) 一词, 主要指"数的理论"而言,大致相当于现在的"数论". 而数字的加、减、乘、除等运算则叫做"计算的技巧" (logistica), 和前者有明显的区别. 这种分法从毕达哥拉斯时代开始,一直延续到近代, 例如 C F. 高斯 (Gauss) 的数论名著就叫做《算术研究》(Disquisitiones Arithmeticae, 1801). 丢番图《算术》也是讲数论的,它讨论了一次、二次以及个别的三次方程, 还有大量的不定方程. 现在对于具有整系数的不定方程,如果只考虑其整数解,这类方程就叫做丢番图方程, 它是数论的一个分支. 不过丢番图并不要求解答是整数而只要求是正

1) 1621 年在巴黎出版.
2) 1670 年在图卢兹 (Toulouse) 出版.
3) 共 2 卷,1893—1895 年在莱比锡出版.
4) 1885 年在剑桥出版,1910,再版 1964.

有理数。

从另一个角度看，《算术》一书也可以归入代数学的范围。代数学区别于其他学科的最大特点是引入了未知数，并对未知数加以运算，根据问题的条件列出方程，然后解方程求出未知数。算术也有未知数，这未知数一般就是问题的答案，一切运算只允许对已知数来施行。在代数中既然要对未知数加以运算，就需要用某种符号来表示它。就引入未知数，创设未知数符号以及建立方程的思想(虽然未有现代方程的形式)这几方面来看，丢番图《算术》完全可以算得上是代数。当时代数学没有专门的名称、algebra 是 9 世纪花拉子米（al-Khowarizmi）以后才出现的名称，而且直到 17 世纪还没被欧洲人普遍接受。丢番图将这方面的成果冠以算术之名是很自然的。他被后人称为“代数学之父”也是有一定道理的。（见[18]，p. 202.）

希腊数学自毕达哥拉斯学派以后，兴趣中心在几何，他们认为只有经过几何论证的命题才是可靠的。为了逻辑的严密性，代数也披上了几何的外衣，一切代数问题，甚至简单的一次方程的求解，也都纳入僵硬的几何模式之中。直到丢番图，才把代数解放出来，摆脱了几何的羁绊。（见[9]，p. 238.）例如，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的关系在欧几里得《几何原本》中是一条重要的几何定理（卷 II 命题 4），而在丢番图《算术》中只是简单代数运算法则的必然结果。

下面通过一个例子来说明丢番图解决问题的手法．卷 II 第 20 题：求两数，使得任一数的平方加上另一数等于一个平方数．（[10]，p. 101.）这相当于不定方程

$$x^2+y=m^2$$
$$y^2+x=n^2$$

要求所有的未知数 x,y,m,n 都是正有理数。

丢番图只设一个未知数，也只使用一个未知数的符号，这是他的特点之一，今暂记作 x。其余的未知数根据问题的具体条件用含 x 的一个简单式子表示出来。本例的条件是 x^2 加上另一个未

知数等于一个平方数，故可设这个未知数是 $2x+1$，因为 x^2+2x+1 正好是一个完全平方。其次，还应该满足

$$(2x+1)^2+x=\text{平方数}.$$

丢番图设右端是 $(2x-2)^2$，显然是想使展开后左右两端相同的 $4x^2$ 项可以对消，于是得到 $x=\frac{3}{13}$，另一数是 $\frac{19}{13}$。

-2 是怎样来的？[1] 不妨先令右端是 $(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$，消去 $4x^2$ 后可得 $x=\frac{a^2-1}{5-4a}$。为了保证 $x>0$，需使 $a<-1$ 或 $1<a<\frac{5}{4}$，最简单的办法是令 $a=-2$。

原文很简单，没有说明这样设未知数的理由，更没有给出一般的法则。他虽然知道问题有多个答案，但常常得到一个答案就已满足。他认为代数方法（可理解为一种倒推法，先假设未知数存在，列出方程然后求解）比几何的演绎陈述更适宜于解决问题。解题的过程中显示出高度的巧思和独创性，在希腊数学中独树一帜。有的数学史家说（见[11]，p. 60），如果丢番图的著作不是用希腊文写的，人们就不会想到这是希腊人的成果，因为看不出有古典希腊数学的风格，从思想方法到整个科目结构都是全新的。如果没有丢番图的工作，也许人们以为希腊人完全不懂代数。有人甚至猜想他是希腊化了的巴比伦人。（见[13]，p.74.）

代 数 符 号

G. H. F. 内塞尔曼（Nesselmann，1811—1881）根据符号使用的情况，将代数学分为三类（见[12]，pp.301—306）：（1）文词代数（rhetorische algebra），完全用文字来叙述而不用符号；（2）简字代数（synkopierte algebra）；（3）符号代数（symbolische

1）这里是减去 2 的意思，丢番图从不单独使用负数。

algebra)，除了个别地方，一切全用符号来表示。按照这个分类，丢番图《算术》应该属于第二类。符号的使用，在数学史上是一件大事。一套优良的符号，绝不仅仅是起到加快速度、节省时间的作用，它能够准确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。一个较复杂的式子，如果不用符号而日常语言来表述，会十分冗长而含混不清。符号的发明在数学史上是一次飞跃，也是代数的特征之一，其作用是不容低估的。丢番图创设了一些符号，多半采自相应文字的字头，而问题的叙述主要仍然是用文字，和现代的符号代数相去甚远，只可算是较原始的简字代数。

他用 $\overset{\circ}{M}$ 表示数的单位，取自 *Μόνας*（单位）的字头。未知数定义为“未确定单位的数量”并叫做 *ἀριθμός*（数），用特殊的符号来表示它。由于丢番图本人的原始手稿早已失传，后人传抄的手稿上这个符号又不很统一，故很难确知他用的是什么符号。不过几种手稿都像是 ς，这是希腊字母 σ 放在词尾的形状。（见[8]，p. 456）希腊记数法系统是用字母表数，如 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 分别表示 1，2，3，4…；$\iota,\kappa,\lambda,\mu,\cdots$ 分别表示 10，20，30，40，…；$\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\cdots$ 分别表示 100，200，300，400，…等等，24 个字母都用到了，还外加 3 个符号，就是 σ 的词尾形状 ς 没有用到，故用它来表示未知数，可以不至和数目字相混，它同时又是 *ἀριθμός* 的词尾。值得注意的是，在一份大约写于 2 世纪的纸草书上，也出现和丢番图未知数相类似的符号[1]，上面所列的三个算题，解题方法也具有丢番图的风格。可以想象，丢番图的工作不是孤立的，他受到强烈的外来影响。

丢番图所处理的问题大部分是多元的，但他只设一个未知数的符号，相当于现在的 x。而和 $x^2,x^3,\cdots,x^6$ 相当的各次幂，都有专门的名称和符号：

---

1) 此纸草称为“密歇根纸草 620”，见 F. E. Robbins. “P. Mich. 620: A Series of Arithmetical Problems”，载 Classical Philology (1929)。参见[10]，p.108.

名称	符号
x^2 δύναμις（平方）	Δ^Y
x^3 κύβος（立方）	K^Y
x^4 δυναμοδύναμις（平方的平方）	$\Delta^Y\Delta$
x^5 δυναμόκυβος（平方的立方）	ΔK^Y
x^6 κυβόκυβος（立方的立方）	K^YK

符号是名称的缩写，注意 Δ，Υ，Κ 是字母 δ，υ，κ 的大写．这些乘幂的倒数也有专名和符号，6 次以上的幂不再创设符号．未知数的系数紧接着写在未知数后面，没有加号、乘号和除号，如 $K^Y\bar{\alpha}\Delta^Y\overline{\iota\gamma}\varsigma\bar{\epsilon}$ 相当于 x^3+13x^2+5x．若有常数项，还加上单位的符号．如 $K^Y\bar{\alpha}\Delta^Y\overline{\iota\gamma}\varsigma\bar{\epsilon}\mathring{M}\bar{\beta}$ 相当于 x^3+13x^2+5x+2．字母上的短横表示是数字．

丢番图特别给出了减法的符号 ⋀，称之为 λεῖψις（缺乏，不足），这符号可能是 Ψ 倒过来再变形．与此相对的加法叫做 ὕπαρξις（存在，出现）．他正确地指出带有加法与减法的项（即正、负项）相乘的法则：“‘缺乏’乘以‘缺乏’得到‘存在’；‘缺乏’乘以‘存在’得到‘缺乏’”，即负乘负得正，负乘正得负．（见[8] p. 460）

由于没有加号，书写时所有的负项都放在减号的后面，如 x^3-5x^2+8x-1 写成

$$K^Y\bar{\alpha}\varsigma\bar{\eta}\pitchfork\Delta^Y\bar{\epsilon}\mathring{M}\bar{\alpha}$$

分式也有特别的写法，先写分子，再写 ἐν μορίῳ 或 μορίου（原意是“属于部分”，相当于“除以”或分数线/），接着写分母．例如卷 10（原希腊文本卷 6）第 19 题，将

$$(2x^3+3x^2+x)/(x^2+2x+1)$$

写成

$$K^Y\bar{\beta}\Delta^Y\bar{\gamma}\varsigma\bar{\alpha}\text{ἐν μορίῳ}\Delta^Y\bar{\alpha}\varsigma\bar{\beta}\mathring{M}\bar{\alpha}$$

等号 ἴσ. 是 ἴσος（相等）的缩写，如卷 10 第 8 题 $630x^2+73x=6$ 写成

$$\Delta^Y\overline{\chi\lambda}\varsigma\overline{o\gamma}\text{ἴσ.}\mathring{M}\bar{\varsigma}$$

这已非常接近现代方程的形式。最后一个符号 ϛ 表示数字 6，是希腊字母表以外的记号，读作 digamma。(见[14]，p. 261.)

丢番图创用符号是一大进步，美中不足的是只用符号表示一个未知数，遇到多个未知数时仍用同一符号，这使得计算过程越来越晦涩。为了避免混淆，不得不运用高度的技巧，但这常常使方法失去普遍性。8—9 世纪以后，阿拉伯人吸取了许多希腊人的成果，然而却没有看到符号的优点，花拉子米等人完全回到文词代数上去，这是历史上的倒退。

《算术》的典型问题和解答

(一) 一、二、三次方程

《算术》没有系统地给出一、二次方程的解法。大概是一元一次方程太简单，没有必要单独论述，实际它已包含在 $ax^n=b$ 类型的方程之中。经过移项、消去等手续，有些问题化为这类方程之后，立即得到解答。不管答案有几个，丢番图仅满足于一个答案。他完全排斥负数解答，例如卷 9(原希腊文本卷 5)第 2 题最后化为 $4=4x+20$，他认为是荒谬的。无理数的解答也不取，如卷 7 第 31 题，最后得 $3x+18=5x^2$，他说这方程是不合理的，还反过来考虑怎样改变系数，才使得答案"合理"(即为有理数)。对于答案 $x=0$ 也是弃之而不顾。

关于二次方程，丢番图在序言中就说过要给出完整的解法，但在现存的各章中均未见到，很可能恰好写在失传的部分或别的什么地方。另一种意见认为二次方程的解法早已为巴比伦人所知，可以作为阅读本书的预备知识，不必另作介绍。([6]，p. 76.)

不管怎样，书中确实出现了若干二次方程或可归结为二次方程的问题，希思就列举了十几个例子，其中包括二次不等式。(见[8]，p. 464.)这些例子足以说明丢番图熟练掌握了二次方程的求根公式。当然仍然是限于正有理根。有的学者认为他不知道二次方程可能有两个根(见[11]，p. 61)，这是很难令人相信的。不过

他始终只取一个根，如果有两个正根，他就取较大的一个。

较简单的例子如第1卷27题：两数之和是20，积是96，求这两数。解法是：设两数分别是$10+x$，$10-x$，于是$(10+x)(10-x)=10^2-x^2=96$，$x^2=4$，$x=2$，两数是12，8。

卷1第28题：两数之和是20，平方和是208，求这两数。同样设两数是$10+x$，$10-x$，则$(10+x)^2+(10-x)^2=208$，$x=2$，两数是12，8。

较复杂的含一次项的例子如8卷31题，最后得到$325x^2=3x+18$；应有两根$x=6/25$，$-3/13$，只取正根，负根不提。

更复杂一点的例子是卷9第10题（见[8]，p.464），导致不等式

$$17x^2+17<72x<19x^2+19,$$

相当于不等式组

$$\begin{cases}17x^2-72x+17<0\\19x^2-72x+19>0,\end{cases}$$

正确的答案应该是

$$\beta_1<x<\beta_2,\quad \alpha_2<x<\alpha_1,$$

其中

$$\alpha_1=\frac{36+\sqrt{1007}}{17}=3.98430\cdots$$

$$\beta_1=\frac{36-\sqrt{1007}}{17}=0.25098\cdots$$

是方程$17x^2-72x+17=0$的两个根；

$$\alpha_2=\frac{36+\sqrt{935}}{19}=3.50409\cdots$$

$$\beta_2=\frac{36-\sqrt{935}}{19}=0.28538\cdots$$

是方程$19x^2-72x+19=0$的两个根。

遇到两个正根的时候，丢番图只取较大的，故只取$\alpha_2<x<\alpha_1$，对于无理数，则取近似值。但要保证x落在区间(α_2,α_1)内，

α_2 只能取过剩近似，而 α_1 只能取不足的. 丢番图将

$$\alpha_2 = \frac{66.577\cdots}{19} \text{ 及 } \alpha_1 = \frac{67.733\cdots}{17}$$

分子的小数部分略去，均取不足近似值，给出答案

$$\frac{66}{19} \leqslant x \leqslant \frac{67}{17}.$$

这就出现差错，例如 $\frac{66}{19} < \frac{7}{2}$，但将 $\frac{7}{2}$ 代入不等式组第 2 个就不适合. 在这里可以看到丢番图的局限性. 用现代的理论，要找出较好的答案是不难的，例如可取

$$\frac{424}{121} \leqslant x \leqslant \frac{761}{191} \text{ 或 } \frac{855}{244} \leqslant x \leqslant \frac{3299}{828} \text{ 等.}$$

全书唯一的一个三次方程，出现在卷 10(原希腊文本卷 6)第 17 题：

求直角三角形的三边，已知它的面积加上斜边是一个平方数，而周长是一立方数。

这相当于

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{1}{2}ab + c = M^2 \\ a + b + c = N^3 \end{cases}$$

其中 a, b, c 是三边。

原书的解法（见[7] p. 538.）是令面积 $\frac{1}{2}ab = x$，即 $ab = 2x$，可设 $a = 2$，$b = x$，而 $c = M^2 - x$，暂设为 $16 - x$，于是周长 $a + b + c = 16 - x + 2 + x = 18$，但 18 不是立方数。仍假设它是一个平方数加 2，现改变这个平方数，使它加 2 后成为立方数. 即找两个数 M, N，满足 $M^2 + 2 = N^3$. 现设[1] $M = m + 1$,

1）他没有说明为什么这样设. 可以这样推想，在式子 $M^2 + 2 = N^3$ 中，左端是平方，右端是立方，M 应该大于 N，两数一大一小，通常设为 $m + \alpha, m - \alpha$，不妨令 $\alpha = 1$ 试一试，如不成功再改变 α 的值.

$N = m - 1$,代入得

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1$$

于是有 $m = 4$.

他显然省略了下面的步骤,合并同类项,得

$$4m^2 + 4 = m^3 + m$$

约去因子 $m^2 + 1$.

由此知 $M^2 = 25$, $N = 27$. 仍设面积为 x, 而将斜边改为 $25 - x$, $a = 2$, $b = x$,根据勾股定理

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4$$

即得

$$x = \frac{621}{50}.$$

在《算术》遗失的章节中是否还有三次方程的专门论述, 不得而知。

(二) 不定方程

例 1. 卷 2 第 8 题: 将一个已知的平方数分为两个平方数. 例如将 16 分成两个平方数.

设一个平方数是 x^2,那么另一个是 $16 - x^2$,现要求 $16 - x^2$ 是一平方数。即

$$16 - x^2 = M^2$$

不妨设 $M = mx - 4$,其中 m 是某一整数, 而 4 是 16 的平方根. 例如令 $m = 2$, 于是

$$16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16,$$

立刻得到

$$x = \frac{16}{5}.$$

前面已经提到,费马对这一命题很感兴趣,在旁边的空白处写下著名的"费马大定理".

例 2、卷 4 (阿拉伯文本)第 3 题: 求两个平方数,使其和是一个立方数. (见[6], pp. 89, 286.)

设较小的平方数是 x^2，较大的平方数是 $4x^2$，其和 $5x^2$ 必须是立方数 M^3，不妨设 M 是 x 的某一倍数，比方说就设它是 x，于是 $5x^2 = x^3$，$x = 5$。所求的两个平方数是 25 和 100，其和等于 $5^3 = 125$。

丢番图照例不说明所作假设的理由，更不给出一般的解答，既然是不定方程，找到一个答案就算完结。本例实际上可作更一般的假设。设两个平数是 x^2，m^2x^2，$x^2 + m^2x^2 = (nx)^3$，于是得 $x = \frac{m^2+1}{n^3}$。令 $n = 1, m = 2$ 就得到上面的答案。

给出一般的解，是极个别的情形。如 8 卷 39 题，由方程 $3x^2 + 12x + 9 = (3 - nx)^2$ 得出 $x = \frac{12 + 6n}{n^2 - 3}$，这是用文字来描述的：$x$ 的值是数的 6 倍增加 12，除以数的平方与 3 的差。

例 3. 高阶不定方程。卷 8 第 18 题：求两数，使得第一数的立方加上第二数是一个立方数，而第二数的平方加第一数是一个平方数。相当于联立不定方程

$$\begin{cases} a^3 + b = M^3, \\ b^2 + a = N^2. \end{cases}$$

设第一数是 x，则第二数是一个立数 M^3 减去 x^3，暂设这个立方数是 8，第二数是 $8 - x^3$，它的平方加上第一数是

$$64 - 16x^3 + x^6 + x = N^2.$$

可设 N 是三次式 $x^3 + 8$，因为展开后即将 x^6 及常数 64 消去。合并同类项后得 $x = 32x^3$，约去 x 得 $x^2 = 1/32$。这不是一个平方数(平方根不是有理的)，问题仍未得到解决。

观察 32 的来源，它是 $2 \cdot 2 \cdot 8$ 的结果，而 8 是开头暂设的立方数 M^3，设法改变 M 的值，使 $4M^3 =$ 平方数，不妨就令这平方数是 $16M^2$，于是 $4M^3 = 16M^2$，$M = 4$。

仍设第一数为 x，重新设第二数为 $64 - x^3$，它的平方加上第一数

$$4096 - 128x^3 + x^6 + x = (x^3 + 64)^2,$$

展开后化简，$1=256x^2$，第一数 $x=\frac{1}{16}$，第二数是 $\frac{262143}{4096}$。

丢番图的方法

现存的《算术》以问题集的形式收录了 290 个题目，其中希腊文本 189 个，阿拉伯文本 101 个，此外还有十几个引理和推论，合起来共三百多个问题．大体上按由易到难排列，但很难看得出是用什么标准来分类的．解题的方法更是五花八门，没有一定的法则．数学史家 H. 汉克尔（Hankel，1839—1873）说："近代数学家研究了丢番图的 100 个题后，去解 101 个题，仍然感到困难．……丢番图使人眼花缭乱甚于使人欣喜"．（见[15]，p. 165；[16]，p. 36.）这话稍嫌夸张，却抓住了问题的要害．丢番图没有着力去探求一般性的解法，或去深究丰富多采的解法之间的内在联系，这是《算术》的最大缺点．

有两件事自始至终防碍他取得普遍性的方法．首先，他只用一个符号表示未知数，遇到多个未知数时，不得不用"第一个、第二个、第三个、……"或"大的、中的、小的…"等词句去表达．在多数的情况下令那些未知数取得具体的数值，于是使问题特殊化而得不到普遍的解答．其次，没有创用符号去表示数（如现在的 n, a, b, c，…一样），因此所有的解法都是针对具体数字而设的，对一般的数就不一定适合，这样当然得不到一般的解法．

尽管如此，后人仍然从中摸索出若干常用的方法，下面仅举几个简单的例，以见一斑．

（1）利用一些恒等式，如

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn,$$

可使两数的积与和、差互化．如卷 2 第 11 题：求一数，使其加上 2 是一平方数，加上 3 也是平方数．即

$$\begin{cases} x+3=M^2 \\ x+2=N^2 \end{cases}$$

两式相减得 $M^2-N^2=1$，因 $4\cdot\frac{1}{4}=1$，以 $m=4$，$n=\frac{1}{4}$代人上面恒等式，有$\left(\frac{17}{8}\right)^2-\left(\frac{15}{8}\right)^2=1$，令 $M=\frac{17}{8}$，$N=\frac{15}{8}$，即得 $x=\frac{97}{64}$。

（2）两数和为已知数 M，或两数一大一小，通常设这两数是 $M+x$，$M-x$，然后使其满足其他条件。如前面举过的卷 1 第 28 题。

（3）《算术》除卷 1 外，其余的几乎全是不定方程，特别是牵涉到平方数、立方数。常出现一个或多个这种类型的方程：

$$Ax^2+Bx+C=M^2.$$

可设M是 x 的一次式，适当选择系数使展开后可消去二次项或常数项。

（4）使问题特殊化。为了减少未知数的个数，先令某些未知数取满足一定条件的具体数值，以后不合适时再改变原先的假设。

（5）近似法。令未知数取某种类型的数值，且满足一定条件，这样先求出近似答案，并在计算过程中发现求得正确答案的途径。

以卷 9 第 9 题为例：将 1 分为两部分，使一个已知数加上任何一部分都是平方数。

设这个已知数是 6，问题于是转化为将 13 分为两个平方数，使每一个平方数都>6，即 $13=M^2+N^2$，$M^2>6$，$N^2>6$。

暂设 $M^2=6\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x}\right)^2$，乘上 $4x^2$ 后应仍为平方数，即 $26x^2+1=$平方数$=(5x+1)^2$。于是得 $x=10$。即 $6\frac{1}{2}$加上

$\left(\frac{1}{20}\right)^2=\frac{1}{400}$是平方数，$6\frac{1}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$，但 13 减去$\left(\frac{51}{20}\right)^2$却不是平方数，因此$\left(\frac{1}{20}\right)^2$还不是所求的答案，应稍加改变．由观察知 $3^2+2^2=13$，而 $\frac{51}{20}=3-\frac{9}{20}=2+\frac{11}{20}$，现将 $\frac{1}{20}$ 改为 x，令

$$(3-9x)^2+(2+11x)^2=13,$$

这样得到 $x=\frac{5}{101}$，所求的两个数是 $\frac{5358}{10201}$，$\frac{4843}{10201}$，每一个加上6都是平方数．

丢番图没有进一步推广，实际上，如设

$$(3-mx)^2+(2+nx)^2=13,$$

可得 $x=\frac{6m-4n}{m^2+n^2}$，但要 $(3-mx)^2>6$，$(2+nx)^2>6$，只须选择 m,n，使满足

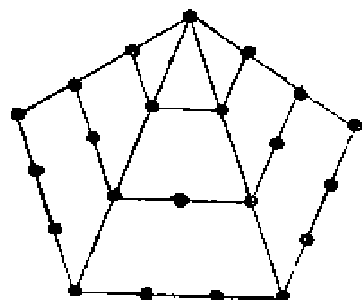
$$\frac{\sqrt{6}-2}{n}<x=\frac{6m-4n}{m^2+n^2}<\frac{3-\sqrt{6}}{m},$$

即可得到答案．比方，令 $m=11$，$n=13$，得到$\frac{2014}{21025}$，$\frac{19011}{21025}$，两数和是 1，每一个加上 6 都是平方数．如令 $m=13$，$n=16$，则得另一组答案 $\frac{110899}{180625}$，$\frac{69726}{180625}$．

其　他　著　作

丢番图的《多角数》只残存一部分，它证明的方式纯粹是几何的，倒很接近古典希腊的风格，而和《算术》迥然不同．多角数（polygonal number）是形数（figurate number）的一种．用点子表示数，可以构成各种平面或立体图形，这个数叫做形数．如 6 个

点构成一个三角形 ∴，6 就是三角数。同样，1，5，12，22，35，…都是五角数，如 22 个点构成一个正五角形，它的边是 4（每边有 4 个点，用 n 表示这个数），角数是 5（用 a 表示）。n，a 与总的点数 P 之间有公式联系起来：



$$p=\frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)}.$$

多角数是一个古老的课题，源出于毕达哥拉斯，后经菲利波斯（Philippos，公元前 360 年前后）、斯皮尤西波斯（Speusippus，公元前 340 年前后）等人研究。上述公式是许普西克勒斯（公元前 175 年前后）给出的，丢番图在《多角数》中加以引用并推广，还建立了其他的公式。

另一本著作《推论集》载有若干数论的引理及推论，可以看作《算术》的一部分或补充。

来 源 及 影 响

从古代埃及、巴比伦的衰亡，到希腊文化的昌盛，这过渡时期没有留下什么数学典籍，所以现在的了解是不够的。巴比伦人在代数方面（如二次方程、不定方程）有很高的成就，丢番图的技巧和他们颇有相似之处。例如 S. 甘兹（Gandz）指出，《算术》卷 2 第 10 题（将已知数分为二个平方数之差）已在巴比伦的泥板上见到。（见[17]，pp. 13—14.）丢番图常满足于问题的解决（得到一个解）而不去追求方程的全部解，《算术》与其说是代数教科书，不如说是一本问题集，这些地方都和巴比伦数学相仿。他的工作有时被说成是"盛开的巴比伦代数的花朵"。（见[18]，p. 203.）

不管丢番图受到巴比伦人的多少影响，他毕竟大大超越了前人，在数论和代数领域作出了杰出的贡献，开辟了广阔的研究道路。如系统地使用了符号，深入讨论了抽象的数而不是埃及、巴比

伦数学中具体的麦粒数目、田亩的面积或货币的单位。这是人类思想上一次不寻常的飞跃，不过这种飞跃在早期希腊数学中已出现。巴比伦人曾致力于将三次方程化为 $n^3 + n^2 = a$ 的形式，以便借助数表去求近似解，而丢番图的兴趣是求精确的有理数解．在多方面显示出惊人的睿智和独创性．

8，9 世纪以后，丢番图的著作传到阿拉伯国家，产生巨大的影响，出现多种翻译和注释本。如凯拉吉（al-Karajī 或 al-Karkhi，活动于 1020 前后）的代数著作《发赫里》（al-Fakhrī）就直接引用《算术》前 3 卷的若干题目。在欧洲，L. 斐波那契（Fibonacci，约 1170—约 1250，意大利人）的《算盘书》（Liber abaci，1202）最早载有丢番图类型的问题，他显然是通过阿拉伯文本去熟悉丢番图的。近代数学家如费马、F. 韦达（Vieta）、欧拉、高斯等也都受到丢番图的许多启发，各自取得巨大的成就。总而言之，丢番图的《算术》虽然有许多不足之处，但瑕不掩瑜，它仍不失为一部承前启后的划时代著作。

文　献

原始文献

[1] P. Tannery, Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis, 2 vols. Leipzig, 1893—1895.

[2] C. G. Bachet de Méziriac, Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, Paris, 1621.

[3] T. L. Heath, Diophantus of Alexandria, a study in the history of Greek algebra, Cambridge, 1885.

[4] O. Schultz, Diophantus von Alexandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen, Berlin, 1822.

[5] P. Ver Eecke, Diophante d'Alexandrie, Paris, 1959.

研究文献

[6] J. Sesiano, Books IV to VII of Diophantus' arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā, Springer-Verlag, 1982.

[7] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, II 1957.

[8] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921.

[9] D. M. Burton, The history of mathematics, Allyn and Bacon, Inc., 1985.
[10] B. L. van der Waerden, Geometry and Algebra in ancient civilizations, Springer-Verlag, 1983.
[11] F. Cajori, A history of mathematics, Macmillan Company, 1919.
[12] G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842.
[13] D. J. Struik, A concise history of mathematics, Dover Publications, Inc., 1948
(中译本: D. J. 斯特洛伊克,数学简史,科学出版社,1956).
[14] G. Ifrah, From one to zero, a universal history of numbers, Lowell Bair 英译, Viking Penguin Inc., 1985.
[15] H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig, 1874.
[16] F. Cajori, A history of elementary mathematics, 1916.
[17] S. Gandz, Studies in Babylonian mathematics I, Indeterminate analysis in Babylonian mathematics, *Osiris*, 8(1948) pp. 13--40.
[18] C. B. Boyer, A history of mathematics, Princeton University Press, 1985.

帕　波　斯

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

帕波斯（Pappus of Alexandria）生于亚历山大，活跃于公元300—350前后。数学、天文、地理。

帕波斯是亚历山大晚期的数学家。确定他的生活年代，主要的依据是他在注释托勒密的书时提到他最近曾目睹一次日食。经考证，这次日食应发生在公元前320年10月18日[1]（[3]）另外，赛翁（Theon of Alexandria，公元390年前后）编写的一份年代表，手稿现藏在莱顿，旁边有注释者的字迹。对着戴克里先（Diocletian，罗马皇帝，公元284—305年在位）的名字写道："此时帕波斯写作"。（[4]，II，p.356。）这和前面的日食年代出入不大，可能在戴克里先时代他还年青，刚开始写作。

帕波斯有不少著作，唯一流传下来的正是最有价值的一种：《数学汇编》（Mathematical collection），简称《汇编》（Collection，或 Synagoge），synagoge 的希腊原文是 συναγωγή，是收集，汇集的意思。《汇编》在历史上占有特殊的地位，这不仅仅是它本身有许多发明创造，更重要的是记述了大量前人的工作，保存了一大批现在在别处无法看到的著作。它和普罗克洛斯的《概要》是研究希腊数学史的两大原始资料。

《汇编》原有8卷，卷I和卷II的前一部分已失传。各卷写于不同的年代，完成全书应在公元320年或340年之后。

1）在 T. von 奥泊尔子（Oppolzer）《日月食典》（Canon der Finsternisse，1887）中是3642号。

目前唯一完善的版本是 F. 胡尔奇 (Hultsch) 校订并翻译的希腊文与拉丁文对照本，包括非常宝贵的导言、注解和附录([1]). 唯一全部译成现代语的有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文译本([2]). 选择其中一部分译出的则较多，而最早的拉丁文译本是 F. 科曼迪诺 (Commandino，1509—1575) 作出的(1566)，只是一部分. 以后在 17，18 世纪及近代又有多种摘要译本(例如[6]).

公元 4 世纪，希腊数学已成强弩之末. "黄金时代"(公元前 300—200)几何巨匠已离去五、六百年，公元前 146 年亚历山大被罗马人占领，学者们虽然仍能继续研究，然而已没有他们的先辈那种气势雄伟、一往无前的创作精神. 公元后，兴趣转向天文的应用，除门纳劳斯、托勒密在三角学方面有所建树之外，理论几何的活力逐渐凋萎. 在此情况之下，总结数百年来前人披荆斩棘所取得的成果，以免年久失传，确是十分必要的. 这项任务由帕波斯来完成.

他为此目的写成《分析荟萃》(Treasury of analysis) 一书，收录了欧几里得、阿波罗尼奥斯等人著作的重要部分，可惜此书已失传. 后来又有《汇编》之作，其中的卷VII反映了《分析荟萃》的主要内容. 《汇编》不是希腊数学的百科全书，它更像一本手册，必须和原著一起研读. 但由于许多原著已经散失，《汇编》便成为了解这些著作的唯一源泉.

《汇编》内容简介

失传的卷 I 和卷 II 的前 13 个命题大概和留下来的部分一样，是论述阿波罗尼奥斯的大数记法的，相当于以"万" (10000, myriad) 为底的乘幂表示法.

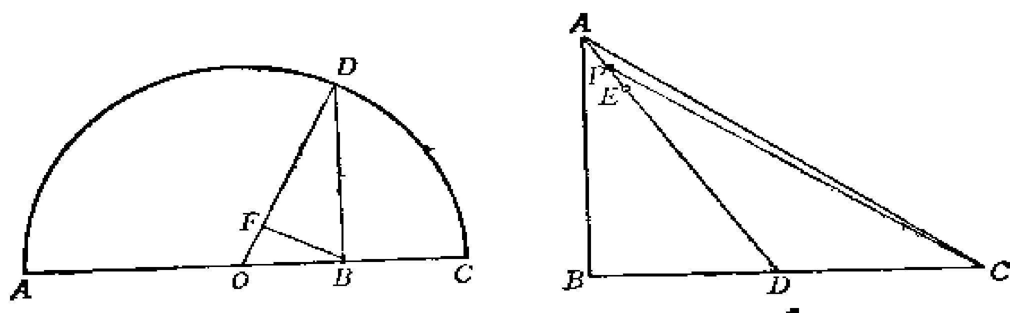
卷 III 分 4 节，第 1 节将几何问题明确地分为 3 类： 1. 平面 (plane) 问题，即可以用直尺圆规解决的问题; 2. 立体 (solid) 问题，要用立体(指圆锥)的截线，即圆锥曲线来解决. 3. 线性(linear) 问题，用比圆锥曲线更复杂的曲线来解决，如螺线、割圆曲线 (qu-

adratrix)，蚌线（conchoid）、蔓叶线（cissoid）等．这些曲线有的已有机械作图法．

注意此处"线性"一词的用法和现代迥然不同．现在所谓"线性"就是"直线性"或"一次性"，但希腊当时的"线"包括直线和曲线，这里指的是曲线，还特别将直线及圆锥曲线排除在外．帕波斯指出求两线段的两个等比中项的问题(即倍立方问题)属于立体问题，这表明他已意识到不可能用尺规来解决．这一事实直到 19 世纪才获得严格证明．

接着他给出埃拉托塞尼、尼科米迪斯及海伦三家的倍立方问题解法．最后补充声称是自己的第 4 种解法，这和欧托基奥斯所说的斯波拉斯(Sporus of Nicaea)解法大同小异．([4],I,p.266.)

第 2 节讨论各种中项(平均)：等差中项、等比中项、调和中项



等．记载某一位几何学家(没有指名)给出下述的关系：设 ADC 是以 O 为心，AOC 为直径的半圆，B 是 OC 上任一点，作 $BD \perp AC$ 交半圆于 D，连 OD，作 $BF \perp OD$．则 OD，BD 分别是 AB 与 BC 的等差、等比中项，这是明显的．又 FD 是 AB 与 BC 的调和中项，帕波斯对此没有给出证明，实际证明很容易．([5]，p.438)除此以外，还讨论了其他 6 种中项．

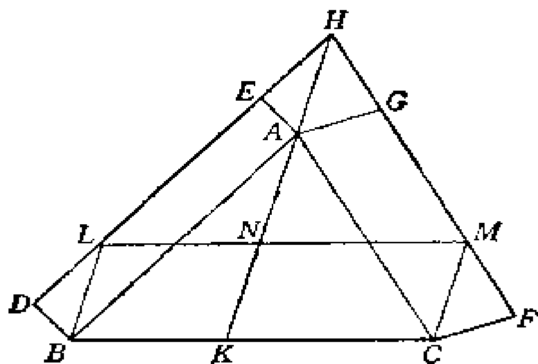
第 3 节有一系列的命题，直接抄录自艾里西诺斯（Erycinus）的《悖论集》（Paradoxes），内容和欧几里得《几何原本》卷 1 第 21 命题有关．这命题是：从 $\triangle ABC$ 底边 BC 的两端点 B、C 作直线交于三角形内一点 P，则构成的 $\triangle BPC$ 两边之和 $BP + PC < BA + AC$．帕波斯证明了如果直线不从两端点而是从 BC 上

某一点D出发，则构成三角形的两边之和可以等于或大于原三角形两边之和。例如在直角三角形 ABC 中，在底边 BC 上取一点 D,连 AD，在其上取E使 $DE = BA$，取 EA 的中点 P，连 PC,则 $DP + PC > BA + AC$。其余的命题与此类似，但复杂得多。

第 4 节论述如何作球的内接五种正多面体、和《几何原本》卷 XIII 的方法不同。

帕波斯并不是单纯照录前人的工作，他随时提出自己的见解，包括对已有知识的修正、补充、评论、引伸，也有些完全是独创的。但他没有处处都指明来源，以致常常分不清是谁的研究成果或者是他本人的发明。

卷 IV 第 1 节是勾股定理(《几何原本》卷 I 47 命题，西方名为毕达哥拉斯定理)的推广。设 $\triangle ABC$ 是任意三角形，在 AB，AC 上各任作 $\square ABDE$，$\square ACFG$，延长 DE 与 FG 交于 H，连 AH。则 $\square ABDE$ 与 $\square ACFG$ 之和等于以 BC 及 AH 为边，夹角为 $\angle ABC + \angle DHA$ 的平行四边形。

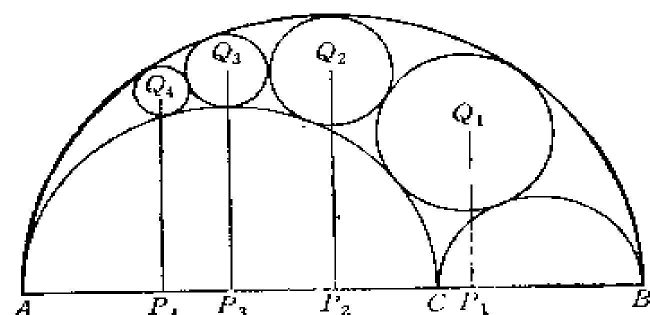


如图所示，延长 HA 交 BC 于 K，作 $CM \parallel AH$，$BL \parallel AH$。则不难证明 $\square BCML$ 等于 AB，AC 上的两个平行四边形之和。

这一节还有若干圆相切的问题。

第 2 节是引起人们极大兴趣的“皮匠刀”(shoemaker's knife, ἄρβηλος) 问题。所谓“皮匠刀”，是三个半圆所包围的部分，两个小半圆外切，又同时内切于大半圆。阿基米德在《引理集》(Book

of Lemmas）中曾经给出这图形的一些性质。帕波斯进一步加以探索。



在大半圆的直径 AB 上任取一点 C，以 AC 及 CB 为直径分别作半圆，就得到"皮匠刀"。设在"皮匠刀"内有一连串互相外切的圆 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$（同时又切于圆形的边缘），其直径依次为 $d_1, d_2, d_3, \cdots$。从各圆的圆心向 AB 作垂线 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \cdots$，帕波斯证明了

$$P_1Q_1 = d_1, \quad P_2Q_2 = 2d_2, \quad P_3Q_3 = 3d_3, \cdots.$$

接着还讨论了其他种种的情形[1]。

这一卷的其余部分主要讨论一些特殊曲线和怎样利用这些曲线去解决"三大问题"。首先是阿基米德螺线，他用不同于阿基米德的方法巧妙地求出第一圈和始线所包围的面积。

其次描述了尼科米迪斯发明的蚌线，并用蚌线解倍立方问题。尼科米迪斯的著作已失传，有赖帕波斯和其他学者的记载，他的成果才保存下来。

接着阐述了"割圆曲线"，这曲线最初由希皮亚斯（Hippias of Elis，公元前 400 年）提出，后来狄诺斯特拉托斯（Dinostratus）和尼科米迪斯都研究过并用来"化圆为方"（作一正方形等于已知圆

1）"皮匠刀"问题在中国和日本常称为"圆内容累圆术"，日本人研究的甚多，见藤原松三郎《日本数学史要》（东京都，1956），p.251；林鹤一《和算研究集录》（下，东京都，1937），pp.833－845．中国周达（1878－?）著《巴氏累圆奇题解》（知新算社，1904）对此颇有发明．

的面积)。

帕波斯给出两种利用"曲面轨迹"(surface-loci)产生割圆曲线的方法,一种是用柱面螺旋线(cylindrical helix),一种是以阿基米德螺线为底的直柱。他还陈述一种"球面上的螺线"(spiral on a sphere):设球面上的子午圈(通过南北两极的大圆)以过两极的球直径为轴匀速旋转;在子午圈上有一点,从北极出发匀速向赤道移动,当子午圈旋转一周回到原来的位置时,此点同时到达赤道,此点的轨迹叫做"球面上的螺线"。

最后帕波斯列举了各种三等分任意角的方法。包括双曲线解法,阿基米德螺线解法,割圆曲线解法等,还将一个角分成给定比的两部分。

特别值得注意的是帕波斯在这里用到了圆锥曲线的焦点准线性质,又在卷 VII 中给出证明:设一动点至一定点的距离与至一定直线的距离之比等于常数,则动点的轨迹是圆锥曲线。当这个常数等于1时是抛物线,小于1时是椭圆,大于1时是双曲线.([4],I,p. 243.)

奇怪的是在整个阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》中竟没有这个性质(或定义),只提到椭圆和双曲线的焦点而没有提抛物线的焦点。至于在他之前的阿里斯泰奥斯(Aristaeus,约公元前 340)和欧几里得是否已知这一性质,未有定论。

卷V讲的是"等周问题"(isoperimetry),前面的序言有一段非常精采的关于"蜜蜂的机敏"的描写([4],II, p.389,[6],II,p. 589):

"蜂房是蜂蜜的容器,它是许许多多的六棱柱形,一个挨一个,中间没有一点空隙. 这种设计的优点是避免杂物的掺入,弄脏了这些纯洁的产品。蜜蜂希望有匀称规则的图案,也就是等边等角的图形.……铺满整个平面区域的正多边形一共只有三种:正三角形、正方形和正六边形。蜜蜂凭着本能的智慧选择了角最多的六边形. 因为使用同样多的材料,六边形比三角形和正方形具有更大的面积,从而可贮藏更多的蜜. 人的知慧比蜜蜂更胜一筹,我

们能够研究更一般的问题，知道在周界相等的正多边形中，角越多面积越大。周界相同，面积最大的平面图形是圆”。

帕波斯如果进一步观察蜂房的底部，会令他更加惊奇，那是由三个相同的菱形组成的，菱形的一个角总是 109°28′. 这引起 18 世纪时学者们一系列的研究[1]。

本卷第 1 节介绍和补充芝诺多罗斯（Zenodorus，约公元前180)的工作，他曾著《论等积形》（On isometric figures）一书，已失传，若干命题保留在赛翁（Theon of Alexandria）给托勒密《天文集》卷 I 所作的注释中。帕波斯所列举芝诺多罗斯的命题有：

(1) 周长相等的正多边形中，边数越多的面积越大；

(2) 圆面积比有同样周长的正多边形面积大；

(3) 周长相等的 n 边形中，正 n 边形面积最大；

(4) 表面积相等的立体中，球的体积最大。

帕波斯补充了一个命题：周长相等的弓形中，半圆的面积最大。

第 2 节比较各种表面积相等的立体的体积。帕波斯并不企图证明球体积比一切表面积相等的立体都大，只是证明比表面积相等的正多面体以及锥体、柱体的体积大。

第 3 节记述了阿基米德发现的 13 种半正多面体，这是别的资料所没有的. 半正多面体就是由若干类的正多边形构成的多面体，每一类正多边形必须相等，例如 18 个相等的正方形和 8 个相等的正三角形构成一个 26 面体。

第 4 节是和阿基米德《论球与圆柱》(On the sphere and cylinder) 有关的一些命题。

第 5 节证明了 5 种正面体若有相同的表面积，则面数越多，体积越大。

卷 VI 主要讲天文学，指出许多书中的遗漏和错误。有的是疏忽造成的，有的表达不够确切，也有的可以进一步改进。提到的

---

1) 参见梁宗巨《世界数学史简编》，辽宁人民出版社，1980，p.500.

书有托勒密《小天文学》(Little astronomy)[1],西奥多修斯 (Theodosius of Bithynia)《球面学》(Sphaerica)、《论昼夜》(On days and nights),门纳劳斯《球面学》(Sphaerica),奥托利科斯 (Autolycus of Pitane)《运行的天体》(On moving sphere),还有欧几里得《现象》(Phaenomena)、《光学》(Optics) 等.

卷 VII 是全书最重要的一卷,它除了保存大量已失传的著作外,更难能可贵的是富有启发性的思想,对后来数学的发展有深刻的影响. 他收集了 12 种书,视为几何学的精华,构成他的《分析荟萃》. 他认为通过《几何原本》的学习之后,要登堂入室,达到更高的境界,就要掌握这些知识.

他列举的书除了欧几里得《已知数》(The data) 和阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》(Conics) 之外,其余 10 种均已失传. 计有: 欧几里得《推论集》(Porisms)、《曲面轨迹》(Surface-loci); 阿波罗尼奥斯《截取线段成定比》(Cutting-off of a ratio)、《截取面积等于已知面积》(Cutting-off of an area)、《确定的截线》(Determinate section)、《论接触》(Contacts)、《倾斜》(Inclinations)、《平面轨迹》(Plane loci); 阿里斯泰奥斯 (Aristaeus)《立体轨迹》(Solid loci); 埃拉托塞尼《论平均值》(On means). ([4], II, p. 401.)

帕波斯用"分析"作为书名,为了明确起见,他在本卷之首,先给出"分析"与"综合"的定义. 这本来是哲学或逻辑学的术语,是指思维的一种基本过程和方法. 分析是把事物分解为各个属性、部分、方面,而综合是把事物的各个属性、部分、方面结合起来. 但在数学中,意义完全不同. 分析法是由结论推到前提的方法,即先假定结论是真的,倒推回去,推出一已知为真的命题. 又如果每一步都是可逆的,就等于证明了从已知命题可以推出结论. 在几何作图题中,常常先设图形已经作出,然后进行推理,从中发现图形的性质,于是找到作图的方法. 这一步骤叫做分析,现在仍然是常

1) 这是一本入门书,用此名以区别于他的巨著《天文集》(Syntaxis). 帕波斯列举的书有许多是收集在此书中的.

用的方法．粗略地说，分析法就是一种倒推法．而综合法的过程与此相反，是由已知推出所要证明的结论．这种定义最早记载在欧几里得《几何原本》卷 XIII 第 1 命题的后面，是后人补充上去的．（[7],III,p.442）最先提出这个定义大概是欧多克索斯（Eudoxus,[8],p.27），帕波斯在这一卷里再一次加以肯定．

帕波斯在介绍各家的学说时，常提出自己一些新的见解．他综述了阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》,其中卷 III 有关于"3或 4 条直线的轨迹"问题：设 p_1,p_2,p_3 或 p_1，p_2，p_3，p_4 是一点到 3 或 4 条固定直线的距离(或者是垂直距离,或者量距离的直线与固定直线交于一定的角度)，若 $p_1p_2=\lambda p_3^2$（3 直线的情形)或 $p_1p_2=\lambda p_3p_4$（4 直线的情形)，其中 λ 是常数，则点的轨迹是圆锥曲线．帕波斯将它推广到 5 条或 6 条直线：设一点到 5 条或 6 条固定直线的距离为 $p_1,\cdots,p_5$ 或 $p_1,\cdots p_6$,若 $p_1p_2p_3=\lambda p_4p_5a$ 或 $p_1p_2p_3=\lambda p_4p_5p_6$,其中 a 是一给定线段的长，则点的轨迹也是一条确定的曲线，但这曲线(自然比圆锥曲线复杂)尚未被研究出来．

他进一步推广到任意条固定直线的情形,这里遇到一个困难．当时希腊人将两条线段的乘积看作面积,3 条线段的积看作体积，3 条以上的积没有几何意义，应该避免出现．帕波斯巧妙地用复比的办法来克服了这一困难,因为两条线段的比已不是线段,若干个比可以任意相乘．于是命题可以表达为：若一点到 n 条固定直线的距离为 $p_1,\cdots,p_n$,如果

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_n}{a}=\lambda\quad(n\text{ 是奇数时}),$$

或

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_{n-1}}{p_n}=\lambda\quad(n\text{ 是偶数时}),$$

则点的轨迹是一确定的曲线．

这问题的历史意义在于,他提出了一个重要的轨迹问题,启发人们去思考．一千多年之后,终于导致一个新领域——解析几何的诞生．笛卡儿(1637)用代数方法去研究"多条直线问题"，这是促

使他去创立解析几何的主要动机之一．他在《几何学》(La Géométrie) 中用大量的篇幅征引了帕波斯的著作 (拉丁译文)并从这一问题入手去阐发坐标几何思想．(见[9]．) 牛顿在《自然哲学之数学原理》第 1 编第 5 章 ([10],p. 129) 也详细讨论了“4 直线轨迹问题”，用纯粹几何方法去证明轨迹是圆锥曲线．

帕波斯另一项值得称道的贡献是提出后来称为“古尔丁[1] 定理”的命题：“封闭的平面图形围绕同一平面内且不与之相交的轴回转，所产生的体积等于这图形面积乘以图形重心所描画出的圆周的长”．他还进一步断言：“可以将封闭平面图形改成一段平面曲线，它回转所产生的曲面面积等于曲线的长乘以其重心所画过的圆周的长．”[2] 帕波斯只叙述而没有证明．后来古尔丁在他的书(1635—1641)中重提这个定理，实际上他也没有证明，只是作了“形而上学的推理”(metaphysical reasoning)．卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，1598-1647) 指出这一缺陷后用自己创立的“不可分法”(method of indivisibles) 去证明它．

帕波斯在介绍上述各种著作时，原是为了便于读者理解，先给出一系列引理．而现在却可以通过这些引理去推测已失传著作的内容．这些引理也有其本身的价值，它包括很多新的思想．例如已经出现属于射影几何学的一些概念，如对合 (involution)、非调和比 (anharmonic ratio，即 cross ratio，交比)[3]等．这些概念未必是他的发明，但至少已熟练掌握，为后世的射影几何研究提供了线索．

根据引理的内容，可以推断阿波罗尼奥斯《确定的截线》一书实际相当于一部“对合的理论”．交比的概念出现也很早[4]，门纳劳

---

1) Paul Guldin，1577—1643，瑞士人．

2) 有一种意见认为这个命题是后来的注释者加上去的，但没有充分的理由．希思 (Heath) 则肯定在帕波斯前后，没有别的人能发现这样的命题．([4],II，p.403)此说已为多数人所接受．

3) 非调和比之名是 M．沙勒 (Chasles，1793—1880) 引入的，W．K．克利福德 (Clifford，1845—1879) 则称为交比．

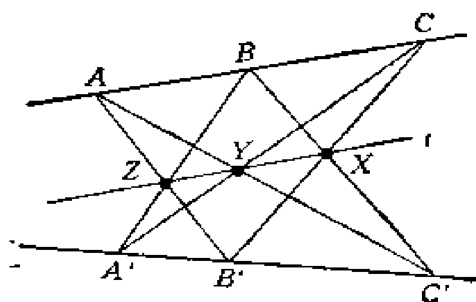
4) 大概在欧几里得之前已经知道．

斯(公元 100 年)在《球面学》中已用到球面上的交比性质。

帕波斯有一些引理可以归入几何代数学的范围，即用几何的形式表达代数的内容。例如，设 $ax=by$，则

$$\frac{a}{x}=\frac{(a-y)(a-b)}{(b-x)(y-x)} \text{ 及 } \frac{b}{y}=\frac{(a-b)(b-x)}{(a-y)(y-x)} \text{等。}$$

最有名的是为欧几里得《引理集》所作的引理 13 (即命题 139)：A, B, C 是一直线上的 3 点，A', B', C' 是另一直线上的 3 点，AB' 与 $A'B$ 交于 Z，BC' 与 $B'C$ 交于 X，CA' 与 $C'A$ 交于 Y，则 X，Y，Z 三点共线。这命题一直被称为"帕波斯定理"。



卷 VIII 的主要内容是力学。他在序言中极力维护力学是数学一部分的主张，强调力学的价值绝不仅仅因为有实际应用。本卷一开始就给出重心的定义：物体的重心是这样的点，如果在那一点将物体悬挂起来，物体就静止不动，不管放的位置如何。接着研究斜面的作用，指出通过 5 个已知点作圆锥曲线的方法，解决作 7 个全等的正 6 边形内接于一个圆的问题，还论述了齿轮、螺钉、杠杆和滑轮等。

帕波斯还写过关于地理、音乐、流体静力学等方面的书，注释过托勒密、欧几里得的著作。他是博学多才的，主要的贡献是收集、总结、补充和评述几乎是整个希腊时期的学术工作，使它流传下来并发扬光大，其功不可磨灭。

文 献

原始文献

[1] F. Hultsch, Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Friedericus Hultsch, Berlin, 1876—1878.

[2] P. V. Eecke, Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique: oeuvre traduite pour la première fois du grec en français avec une introduction et

des notes, Paris-Bruges, 1933.

研究文献

[3] A. Rome, Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, I Rome, 1931.

[4] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[5] T. L. Heath, A manual of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1931.

[6] I. Thomas, Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, 1957.

[7] T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, Dover Publications, Inc., 1956.

[8] F. Cajori, A history of mathematics, Macmillan Company, 1919.

[9] The geometry of René Descartes, D. E. Smith 校订注释并英译, Dover Publications, Inc., 1954.

[10] I Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687(中译本: 牛顿,自然哲学之数学原理,商务印书馆,1931).

赛　　翁

袁　向　东

（中国科学院数学研究所）

赛翁（亚历山大的）（Theon of Alexandria）公元4世纪下半叶生活于埃及的亚历山大．数学，天文学．

有关赛翁的生平活动资料很少．一份较古的文献简略地提到他生活于狄奥多西一世（Theodosius I，公元379—395年在位）时代，是亚历山大博物院的成员．该博物院是一所传授与研讨高深学问的学府，古埃及“希腊化”的托勒密王朝的创立者托勒密一世于公元前300年建于亚历山大．这所学府曾是古希腊的重要学术中心，养育了许多著名学者，但到赛翁的时代已趋衰落．赛翁的主要学术活动是在这里从事教学．他自述他的一些著述是在听课学生的要求下完成的；他的现存作品几乎都是为教学目的撰写的：或是评注或是编辑当时的数学与天文学经典，以备学生使用．赛翁著作中提及的年代也证实他是公元4世纪下叶的学者．他评注了天文学家托勒玫（Claudius Ptolemy）的《天文学大成》（Almagest）和《天文手册》（Handy Table），对后者的评注分《详评本》和《简评本》两种．在《大汇编》的评注本中记录了公元364年他在亚历山大进行的两次天文观测：6月16日的日蚀和11月26日的月蚀；其中的日蚀资料也收入了《详评本》和《简评本》，作为使用手册中的方法推算天文现象的实例．在《简评本》中另记有相应于公元360年6月15日及公元377年11月17日两次日食的计算实例．赛翁评注《天文手册》时还列出了当时罗马执政官的名单，最后一名是公元372年的执政官．在他所有著作中能借以判定其学术活动的

年代都在公元360—379年之间。 赛翁的女儿希帕蒂娅是当时的著名学者，她信仰和宣传新柏拉图主义。狂热的基督徒视她为不赦的异教徒，于公元415年将其分尸于亚历山大。有关此事的记载未提及赛翁，似可认为此时他已去世。

赛翁最主要的工作是评注托勒玫的《天文学大成》，共十三卷，相应于《天文学大成》原著的十三卷。其中第二卷已散失，第五卷尚存片断，其余各卷也有脱漏之处。其序言说明该书是根据他的讲课内容编写的；正文的内容只是对原著的解释和说明，不具开创性和批判性。该书的价值在于帮助当时的学生阅读原著以及为现代读者提供了一些有用的历史信息；如该书提到了现已失传的芝诺多罗斯（Zenodorus）的《论等周图形》。

关于《天文手册》的评注。据他自己称，前人虽评注过《天文学大成》但注释《天文手册》他是第一人。该手册是托勒玫继《天文学大成》之后发表的，意在提供一种简便易行的推算天体位置和其它天文现象的工具书。《详评本》分五卷，解释了手册的结构、原理和使用方法，并给出了有关的几何证明。在该书序言中，赛翁说当时的大多数学生弄不懂几何证明，为此而撰写此书。《简评本》则只含有使用手册进行计算的法则及实例，不涉及证明。由于赛翁的评注，使该手册得以传至伊斯兰天文学家之手，并于12世纪到达说拉丁语的欧洲；在说希腊语的东罗马帝国也有学者研究他对《天文学大成》及《天文手册》的评注本，且在他的基础上写出了新的著作。他的计算实例使现代读者了解到希腊人是如何使用60进位制数系进行乘法、除法及开方运算的。

赛翁的影响最大的著作是他“编辑”的欧几里得的《几何原本》。 他对经典著作的编辑方法不是通过校订准确地恢复原著的本来面目，而是用更适合学生使用的形式重写原著。当时的著作都以手抄本的形式留传，而历史上绝大多数的《几何原本》的手抄本皆以赛翁的版本为蓝本，以至欧几里得的原著本身几乎被人遗忘了，足见其影响之大。19世纪初，拿破仑进军意大利，把梵蒂冈的藏书带回法国，F. 佩拉尔（Peyrard） 从中发现了比赛翁的版

本更早的《几何原本》。经对照比较，可以断定赛翁在编辑《几何原本》时所作的各种更动，它们大致可分成以下几类。1）除去原著中的瑕疵，如原著卷 VI 的命题 19 有一个推论，涉及所有相似图形的相似性，但原命题只讨论了三角形的情形。于是，赛翁用三角形代替该推论中的一般图形，而把有关一般图形的类似推论放到命题 20（它讨论一般图形的相似性）之后。属于这类的改动很少。2）修改了他认为有瑕疵的段落，但实际上原著并无真正的缺陷。如对卷 XI 中的命题 38，赛翁用"平行六面体"代替原文中的"立方体"，理由是该命题除对立方体正确外也适用于一般的平行六面体。但他忽略了欧几里得之所以只给出立方体的特殊情形，是出于前后逻辑的考虑，因为要用到这个命题的卷 XIII 的命题 17 的推理，只需有关立方体的结论。3）改进欧几里得原来的叙述形式或用词，目的是使遣词造句更规范，不涉及本质内容的改变。4）添加新的内容，以补充或解释原文。这类添加的数量较多，但绝大部分都极简单。最典型的有给卷 VI 的命题 33 添加了有关扇形的相应结论。欧几里得原来的命题为"在等圆中，对于圆心角或圆周角，两角之比等于所对弧之比"，赛翁加上的部分为"在等圆中，扇形的比与相应圆心角的比相等"，并给出了证明。5)省略某些词语，以使行文更简洁。赛翁虽作了大量更动，但并未影响《几何原本》原来的结构和基本内容。

赛翁还编辑了欧几里得的《已知数》和《光学》两部著作。在赛翁之前已有人编注过它们。赛翁编的《已知数》与原著出入不大，是为较优秀的学生使用的，注意略去原著中叙述繁琐的部分。赛翁编的《光学》则与原文有较明显的差异：使用的语言不同于原著，具有后期柯因内语的特点；所采用的证明形式也与原著两样。该书的学术价值远逊于托勒玫的《光学》，但由于当时无人关注托勒玫的这部著作（它是通过阿拉伯译本才得以流传的），所以它起过历史作用。另有一本论及光的反射的论著，据行文风格及内容判定，是综合欧几里得及他之后的有关光学理论编成的，内容初等，很象赛翁的手笔。看来，赛翁参与了对光学的探究。

据 O. 诺伊格鲍尔（Neugebauer）考证，赛翁撰写过一本论述小星盘的著作。星盘是一种用于研究球面天文学的仪器。托勒玫在他的著作中讨论过制作星盘的数学理论，因此星盘不会是赛翁的发明. 古代文献还提到过几部现已失传的作品，只知其作者是赛翁，但不能判断是这位亚历山大的赛翁，还是活跃于公元 1 世纪的文典作家赛翁。这些作品是“论(天气的?)前兆现象及对雀和乌鸦叫声的考察”，“论天狼星的升起”，“关于尼罗河涨水”。

赛翁可能对古代黄道进动知识的传播起过积极作用。他在为《天文手册》撰写的《简评本》中提到，“某些古代占星家”相信“冬至和夏至点”有围绕黄道达 8 度的进退摆动。他解释了如何计算修正值以确定天体的位置。赛翁指出，“占星家”的冬至点(不妨记作 P)比托勒玫于公元前 158 年测得的位置(不妨设为 Q)朝东前进了 8 度，并且 P 在以相对于 Q 向西 1 度的年速率运动(由此可知 P 和 Q 将在 483 年重合，之后 P 再向东运动). 到公元九世纪，天文学家认识到岁差(即冬至和夏至点相对于恒星的运动)的速率跟托勒玫认为的每百年运动 1 度不同，更符合天象的数值应为每百年运动 1.5 度. 但他们不愿承认权威的托勒玫有误，而宁肯相信进动速度并非常数，而说它是周期变化的. 这种看法无疑来自赛翁的上述记载. 天文学家哈巴什·哈席卜（Habash al-Hāsib，约公元 850 年）在他的天文表中注明：“根据赛翁的意见，黄道有进退运动”。这一被称为“黄道的震动”理论到 16 世纪晚期还为天文学家所关注.

赛翁生活于古代希腊文明衰落的时期，具有该时期学者的典型特征，他们满足于解释自己所从事的研究领域里的经典，较少创新精神。赛翁是这批学者中的佼佼者。

文　献

[1] T. L. Heath, The Thirteen books of Euclid's Elements, 3 vols., Dover, reprint 1956.

[2] T. L. Heath, A History of Greek mathematics, Vol.II, Oxford Univ. Press, 1921.

希帕蒂娅

袁向东
（中国科学院数学研究所）

希帕蒂娅（Hypatia）约公元370年生于埃及的亚历山大；公元415年卒于亚历山大。数学，哲学。

希帕蒂娅是有史记载的第一位女数学家，也是古希腊文明中最杰出的女科学家、哲学家。其父是亚历山大的赛翁（Theon of Alexandria），当时知名的学者与教师，曾就教于亚历山大博物院，那是专门传授和研讨高深学问的场所。希帕蒂娅早年跟随父亲学习，成年后帮助赛翁评注过天文学家托勒玫（Ptolemy）的天文及数学名著《大汇编》（Almagest）。她很可能协助其父编辑了欧几里得的《几何原本》，这里的"编辑"指对原著的重写，使之更适合当时的学生阅读。赛翁版的《几何原本》是该书所有现代版本的基础。据古代一本辞典记载，希帕蒂娅还评注了丢番图（Diophantus）的《算术》（Arithmetica）和阿波罗尼奥斯（Apollonius）的《圆锥曲线》（Conics）等名著，可惜这些评注本都已失传。

希帕蒂娅本人也在亚历山大从事科学与哲学活动，讲授数学以及普罗提诺（Plotinus）和扬布里柯（Iamblichus）的新柏拉图主义哲学。新柏拉图主义将柏拉图的学说、亚里士多德的学说及新毕达哥拉斯主义综合在一起，核心内容是由普罗提诺首创的关于存在物的统一与等级结构学说。属于这一哲学流派的有以普罗提诺为首的罗马学派（公元3世纪），以扬布里柯为首的叙利亚学派（公元4世纪）。希帕蒂娅的哲学兴趣比较倾向于研究学术与科学问题，而较少追求神秘性和排他性。

约在公元400年左右，希帕蒂娅成为亚历山大的新柏拉图主义学派的领袖。由于她的学术声望，甚至有的基督徒也拜她为师，著名的有昔兰尼加(Cyrene)的西内修斯(Synesius)，后来出任托勒梅厄斯城(Ptolemais)的主教。他向希帕蒂娅请教学问的信件至今尚存，信中问及如何制作星盘(一种借助投影原理制作的反映星空的天文仪器)和滴漏(古代计时工具)。但是，早期的基督徒在很大程度上把科学视为异端邪说，把传播希腊传统文化的人视为异教徒。约公元391年，罗马皇帝狄奥多西一世(Theodosius I)就曾下令拆毁希腊神庙；亚历山大的赛拉庇斯(Sarapis)神庙被毁，藏书尽散，庙宇改为修道院。希帕蒂娅崇尚自由，以其丰富的学识和脍炙人口的讲学继续宣传她的哲学，加上她与该市主教的政敌奥雷斯特斯(Orestes)市长交往甚密，公元415年，她被信奉基督教的一群暴民私刑处死。

希帕蒂娅的悲壮身世，成为一些文艺作品的主题。著名的有1853年出版的金斯利(Charles Kingsley)的小说《希帕蒂娅》。小说中的她聪明、美丽，展雄辩之才又虚怀若谷。

文 献

[1] T. L. Heath., History of Greek mathematics, Vol. II, Oxford Univ. Press, 1921.

[2] M. Kline., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972.

普 罗 克 洛 斯

梁 宗 巨

(辽 宁 师 范 大 学)

普罗克洛斯(Proclus)公元410年(或412年)生于拜占庭(Byzantium,即今伊斯坦布尔,属土耳其),485年卒于雅典.哲学、数学、天文学.

普罗克洛斯出身于吕基亚(Lycia,小亚细亚的西南海岸,今属土耳其)的名门望族,父亲帕特里索斯(Patricius)在拜占庭宫廷中任要职.普罗克洛斯早年在桑索斯(Xanthus,吕基亚的城市)受教育,以后到亚历山大学习拉丁文与修辞,为继承父业作准备.在此期间,他到拜占庭去访问,据说受到了"神的感召"([3]),于是决心献身于哲学.回到亚历山大后,跟随奥林皮奥多罗(Olympiodorus)等学习亚里士多德学说及数学.但这些教师并未使他感到满足,在20岁之前,他又来到雅典,进入柏拉图学园重新学习.自此到公元485年去世,一直留在那里,最初是学生,后来是教师,最后是学园的领导人及导师.

普罗克洛斯是"新柏拉图主义"(Neoplatonism)哲学运动最后的代表人物.这个主义是融合柏拉图、毕达哥拉斯学派、斯多葛学派的学说,进一步加以神秘化而形成.它改造了柏拉图的"理念论",宣称人可以通过直觉进入神的境界.这对后来基督教的教父哲学以及伊斯兰世界的思想都有深刻的影响.它最初由萨卡斯(Ammonias Sakkas,约公元175—约242年)所创立,经过两个多世纪的演变与传播,渐臻完善.代表人物有普罗提诺(Plotinus;

公元 205—270 年)[1]、波菲利(Porphyry,约公元 234—约 305 年)、伊安布利霍斯(Iamblichus, 约公元 250—约 330 年)、普卢塔克(Plutarch, ?—约 431 年)等;最后是普罗克洛斯。他有若干哲学及神学的著作,如《神学原理》(Elements of theology),以几何的形式表现出来,包括一连串的命题,并给予"证明",其理论基础是"超自然的存在"(superexistent)及不可言喻的事物。

普罗克洛斯注释了柏拉图的一些著作,如《巴门尼德》Parmenides)、《蒂迈欧》(Timaeus)、《阿基比阿德》(Alcibiades)、《共和国》(Republic)等。他还注释了许多古代的著作,如托勒密的天文学,亚里士多德的《物理学》(Physics)等。

普罗克洛斯的著作虽然很多(不少已失传),但后世学者最感兴趣的却是他的《欧几里得〈几何原本〉卷 1 注释》(Commentary on the first book of Euclid's Elements),它完整地保存了下来.历来版本和译本很多,现在标准的本子是弗里德莱因(Gottfried Friedlein)的校订本([1])。开头有两个序言,第一个对数学作一般的讨论,指出数学和哲学的关系及其在哲学中的应用。这是最早的数学哲学文献。第二个介绍柏拉图、亚里士多德等人对几何的论述。([4],II,p. 533.)接着是一篇几何学发展简史,现在常称为《普罗克洛斯概要》(Proclus's summary),以下简称《概要》,现较易找到的版本(希腊原文与英译对照)是[2],I,pp. 145—161。

普罗克洛斯是敏锐的评论家和注释家,他对众多的古代著作进行了大量的剖析和研究,给出综合性的描述,写成《概要》一文。他所参考的文献现在多数已失传,因此《概要》便成为后世研究希腊数学史的两大原始资料之一。另一种是帕波斯的《汇编》。

《概要》的叙述从远古的尼罗河泛滥开始,直写到欧几里得《几何原本》,篇幅虽不大,但已包括千余年来几何学的发展概况,对于重要的几何学家大多有所论述。它是现存的最早的数学史书,具

---

1) 一译"柏罗丁"。

有一定的参考价值．它所根据的文献主要有（[4]，II，p. 532)：

1. 欧德莫斯（Eudemus of Rhodes，约公元前320年）《几何学史》(History of geometry)；

2. 盖米诺斯（Geminus，约公元前70年）《数理科学理论》(The theory of the mathematical sciences)；

3. 海伦（Hero）《欧几里得〈几何原本〉注》（Commentary on the Elements of Euclid)；

4. 波菲利，帕波斯分别为《几何原本》所作的注；

5. 阿波罗尼奥斯关于初等几何的著作；

6. 托勒密《平行公设》（On the parallel-postulate)；

7. 波西佐尼奥斯（Posidonius，约公元前135—约前51年)关于芝诺（Zeno of Sidon）的辩论；卡波斯（Carpus）的天文学；西兰诺斯（Syrianus）关于角的讨论．

此外还有柏拉图、亚里士多德、阿基米德及普罗提诺的许多著作。

其中最重要的是欧德莫斯的《几何学史》．他是亚里士多德的门徒，是历史上有资料可查的第一个数学史家，写过算术史、几何学史、天文学史，可惜均已失传．有许多证据表明普罗克洛斯的《概要》摘录自欧德莫斯的书（[4]，II，p.530；[2]，p.144)．因此有的作者称这个《概要》为《欧德莫斯概要》(Eudemian summary)．但最后一段提到欧几里得，显然不是欧德莫斯写的，因为他生活在欧几里得之前．这大概是别人补充上去，最后由普罗克洛斯摘录的([4]，I，p.118)。

《概要》内容摘要

几何学起源于埃及尼罗河泛滥后土地重新测量的需要，正像最早的数字知识由腓尼基人（Phoenician）的商业、契约所引起的一样。

泰勒斯是到埃及去将这种学问（几何学）带回希腊的第一人．

接着是阿迈里斯托（Ameristus），他是诗人斯特西科罗斯（Stesichorus，约公元前630—约前554年）的兄弟，希皮亚斯（Hippias of Elis）[1]说他在几何方面有好名声。毕达哥拉斯将这种学问转化成教育的内容，他力图用逻辑思想去考察这个学科的原理。又发现不可公度量并构造宇宙立体（cosmic solids）[2]。安纳萨戈拉斯（Anaxagoras of Clazomenae，约公元前500—约前428年）[3]和伊诺皮迪斯（Oenopides of Chios，约公元前465年）[4]对几何学也有研究。稍后有希波克拉底（Hippocrates of Chios，公元前5世纪下半），他发现求月牙形面积的方法，最早编写《原本》（Elements）[5]，还有西奥多罗斯（Theodorus of Cyrene，约公元前465—前399年以后），也颇有名。

柏拉图大力倡导几何学，利用一切机会唤起人们对几何的注意，造就了众多的几何学家。那时有勒俄达马斯（Leodamas of Thasos，约公元前380年）[6]，阿尔希塔斯（Archytas of Taras[7]，约公元前375年）[8]，还有泰特托斯（Theaetetus of Athens，公元前417—前369年）[9]，他将定理排列得较有系统。

随后有尼奥克利底（Neoclides）和他的学生勒俄（Leo或Leon，公元前4世纪前半）[10]，曾致力于编纂《原本》，讨论过几何问题的可解条件。

接着有欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus，公元前4世纪）[11]，

1）公元前400年前后，智人学派的主要人物，发现割圆曲线（quadratrix）。
2）即5种正多面体。
3）伊奥尼亚学派晚期哲学家，最早试图解决化圆为方问题。
4）尺规作图的最早倡导者。
5）可能已有欧几里得《几何原本》的风格，可惜已失传。
6）曾和柏拉图提倡分析的证明方法。（[4]，I，p.213）
7）即塔伦特姆（Tarentum），今属意大利。
8）发明用立体图解倍立方问题。
9）可能最早给出5种正多面体理论作图法。
10）此二人生平不详。
11）这个时期最重要的数学家，建立适用于可公度量与不可公度量的比例论，使"穷竭法"严格化。

他和柏拉图友善，扩大研究内容，继续探讨“截线”（section）[1]，并使用分析法。阿米克拉斯（Amyclas of Heraclea）是柏拉图的朋友，门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前4世纪中）[2]是欧多克索斯的学生，还有他的兄弟狄诺斯特拉托斯（Dinostratus）[3]，他们推进了几何学，使它更臻完善。

修迪奥斯（Theudius of Magnesia）长于数学，也精于其他科学。同一时期的还有阿森尼斯（Athenaeus of Cyzicus），他们聚集到柏拉图学园，进行研究。

赫莫蒂默斯（Hermotimus of Colophon）继承欧多克索斯和泰特托斯所开创的工作，发现《原本》的一些命题，发展了几何轨迹理论。菲利普斯（Philippus of Mende）在柏拉图的指引下从事研究，对柏拉图的哲学有所贡献。

在这些学者之后不久，欧几里得就进行《原本》的编写，他收集了大量欧多克索斯的发现，完善了泰特托斯的成果，给出了无可争辩的证明，这些都是前人所没有严格做到的。他生活在托勒密一世（Ptolemy Soter，公元前323—前285年在位）[4]的年代。稍后的阿基米德曾提到欧几里得。有一次托勒密王问欧几里得，除了《原本》之外，还有没有其他学习几何学的捷径，他回答道：几何无王者之道。由此知欧几里得晚于柏拉图的学生，早于埃拉托塞尼和阿基米德，因为埃拉托塞尼也提到过他。

总的来说，《概要》是有一定思想倾向的。它侧重介绍柏拉图学派的人物。这并不奇怪，因为普罗克洛斯本人就是这学派的继承人，对这学派的成就自然十分熟悉和赞赏。而欧德莫斯是亚里士多德的门徒，观点也许就有出人。《概要》所列举的几何学家有一些未见其他文献记载，而有较大影响的德谟克利特（Democri-

1）有两种可能的含义，一是平面截立体所产生的曲线，二是“黄金分割”。（[2]，1，p. 153。）

2）最早系统研究圆锥曲线。

3）用“割圆曲线”解决化圆为方问题。

4）托勒密王朝的建立者。

tus，约公元前460—约前370年)却只字未提．这当然也和柏拉图的看法有关，他认为德谟克利特的学说是有害的，甚至曾想焚毁他的著作．([5]，p.91．) 无论如何，《概要》给后人留下了许多珍贵的资料。

普罗克洛斯还写过一些天文学著作． 如《天文学家的假设》(Hypotyposis of the hypotheses of the astronomers)，详细解释托勒密的体系． 此外还有《球面学》(Sphaera) 及占星术等．在中世纪，他的哲学思想比学术著作的影响更大。

他终生未婚，自奉甚俭，遵行毕达哥拉斯派的素食习惯，常将他的财富去周济困难的亲戚朋友。

文　献

原始文献

[1] Commentary on the first book of Euclid's elements, Gottfried Friedlein 校订，Leipzig, 1873; Leander Shönberger 德译，Halle, 1945; Paul ver Eecke 法译，Bruges, 1949; Thomas Taylor 英译，London, 1792; 又 Glen R. Morrow 英译，Princeton, 1970.

[2] Proclus's summary, Ivor Thomas 英译，Selections illustrating the history of Greek mathematics, Harvard University Press, 1957.

研究文献

[3] J. F. Marinus, Vita Procli, Boissonade 校订，Leipzig, 1814.

[4] T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[5] B. L. van der Waerden, Science awakening, A. Dresden 英译，P. Noordhoff Ltd., 1954.

附录

略论希腊数学

梁 宗 巨

“希腊数学”是一个习惯用语，它并不等同于希腊这个国家或地区所创造的数学，正像“马克思主义”不单纯指马克思一个人的学说，也包含如恩格斯等革命导师的思想一样.

从地理范围来说，古希腊的领土除了现在的希腊半岛外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和色雷斯、意大利半岛和小亚细亚以及非洲北部等地.从时间上说，通常指从公元前600年到公元后600年这一段时间. 现在的数学史书[1]，几乎无一例外地将这一时期在这个地理范围内所发展起来的数学简单地用“希腊数学”一语来概括.理由是它确实有共同的特点，首先是发源于希腊的城邦，其次是使用统一的希腊语言文字，而且学者之间密切接触，有许多是师承关系. 例如毕达哥拉斯早年深受泰勒斯的影响，而雅典学术又得益于毕达哥拉斯学派，欧几里得是柏拉图学园的门徒，而阿基米德曾求学于亚历山大. 晚期帕波斯的著述无非是这些前辈工作的总结和补充，因此思想体系是一脉相承的.

整个希腊数学史可以分为三个时期，第一期从公元前600年到公元前323年；第二期从公元前323年到公元前30年；第三期从公元前30年到公元600年.

第一期以希波战争(公元前500—前449年)为分界，又分为前期与后期.前期以伊奥尼亚学派和毕达哥拉斯学派为代表，前者为

---

1) 例如希思 (Thomas Little Heath, 1861—1940) 的《希腊数学史》(A history of Greek mathematics, Oxford Press, 1921).

首的是泰勒斯，他的贡献是开始了命题的证明，为建立几何的演绎体系迈出了第一步．毕达哥拉斯用数来解释一切，将数学从具体的事物中抽象出来，建立自己的理论．

希波战争以后，雅典成为文人荟萃的中心．人们崇尚公开的精神，在公开的讨论或辩论中，必须具有雄辩、修辞、哲学及数学等方面的知识．同时要有共同遵守的前提和推理规则，这就是公理和逻辑思想的萌芽．当时哲学学派林立，出现百家争鸣的局面，各派的学说中包含很多数学的内容．

智人（Sophist）学派提出几何作图的三大问题：(1) 三等分任意角；(2) 倍立方——求作一立方体，使其体积等于已知立方体的两倍；(3)化圆为方——求作一正方形，使其面积等于一已知圆．希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在"直尺"(无刻度的尺)、圆规的限制下从理论上去解决这些问题．这是几何学从实际应用向演绎体系靠拢的又一步．正因为三大问题不可能用尺规作出，往往使研究者闯入未知的领域里去，作出新的发现．圆锥曲线就是最典型的例子，此外还有各种超越曲线及作图器械．化圆为方问题则导致圆周率及穷竭法的探讨．

埃利亚学派的芝诺提出四个著名的悖论，迫使哲学家和数学家深入思考无穷的问题，这历来是争论的焦点．原子论学派的德谟克利特（Democritus，约公元前 410 年)用原子法求出锥体的体积．柏拉图学派的影响也很大，他在雅典建立学园，培养出一大批数学家．他非常重视数学，特别强调数学在训练智力方面的作用．这个学派的重要人物欧多克索斯创立的适用于可通约量及不可通约量的比例论，后来被欧几里得收入《几何原本》之中．柏拉图的门徒亚里士多德是形式逻辑的奠基者，他的逻辑思想对数学的发展起着不可估量的作用．

公元前 323 年，亚历山大大帝（Alexander the Great，公元前 336—前 323 年在位)死于巴比伦，他创建的大帝国分裂为三个独立王国，由他的部将分治．安提柯（Antigonus）王国占有马其顿及希腊半岛，公元前 168 年灭于罗马．塞琉西（Seleucid）王国领

有小亚细亚、叙利亚及伊朗高原等地，公元前 64 年被罗马所灭．在文化史上，最重要的是托勒密王国，它由托勒密一世 (Soter Ptolemy，约公元前 367—前 283 年)所创，建都于尼罗河口附近的亚历山大 (Alexandria)[1]。

第二期是从公元前 323 年到公元前 30 年亚历山大并入罗马帝国的版图为止。历史学家又常称为“希腊化时期”(Hellenistic period)。“希腊化”(Hellenism) 一词，是德国历史学家 J. G 德洛依森 (Droysen, 1808—1884) 在《希腊化时期的历史》(Geschichte des Hellenismus, 1836—1843)中所创，为后世沿用。也有人认为可以延长到公元 300 年。这时期的特点是希腊世界的文明广泛传播和影响于东方，和各民族的文化交流，创造出丰硕的科学成果。当时亚历山大就是希腊人、埃及人、阿拉伯人和犹太人思想会聚的场所。

托勒密王是一位有远见卓识的统治者，他大力提倡学术，多方网罗人材，招致贤能，建立一座空前宏伟的博物馆、研究所、大学和图书馆的联合机构，藏书 50 万卷(一说 70 万卷)。亚历山大一跃而成为古代世界的学术文化中心，繁荣几达千年之久！直到 641 年图书馆被焚，学者星散。这时希腊本土退居次要地位。

这个时期在数学史上又称为亚历山大前期。这一期出现希腊数学的“黄金时代” (Golden age)(公元前 300—前 200 年)，代表人物是名垂千古的三大几何学家：欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯，他们的丰功伟绩，永志于史册。

第三期是公元前 30 年到公元 600 年，称为亚历山大后期。这时亚历山大已在罗马帝国管辖之下，幸好希腊的文化传统未被破坏，学者还可以继续研究，然而已没有前期那种磅礴的气势。尽管如此，仍然出现了希腊数学的“白银时代”(Silver age)(公元 250—350 年)，代表人物是丢番图和帕波斯。丢番图的代数学在希腊数学中独树一帜，他受到巴比伦数学的深刻影响，他也许就是希腊化

---

1) 按中国地名委员会定名为亚历山大出;不是亚历山大里亚，后者是美国好几个城市的译名(外文拼法相同)。见《外国地名译名手册》，商务印书馆，1983.

的巴比伦人。帕波斯的工作是前期学者研究成果的总结和补充.

希腊数学的终结，以下面这几件事为标志：公元 415 年，希帕蒂娅被基督教徒杀死；529 年，东罗马帝国皇帝查士丁尼（Justinian，公元527—565 年在位）勒令关闭雅典的学校(包括柏拉图创建的学园)，严禁研究和传播数学，数学发展受到致命的打击；641 年，阿拉伯人攻占亚历山大，图书馆再度被焚.

总的来说，希腊数学的成就是辉煌的，它为人类创造了巨大的精神财富，不论从数量还是从质量来衡量，在世界上都是首屈一指的. 数学区别于其他学科最明显的特点是体系的严谨性，这实际从希腊数学才开始具备，历史上第一个公理化的演绎体系就出现在希腊数学之中. 它留下的丰富学术遗产，不仅仅是初等数学(几何、三角、算术、代数)，许多近代数学的思想也可以在其中找到线索. 如戴德金的实数“分划”，实受欧多克索斯比例论的启发；笛卡儿解析几何的起点是探究帕波斯的轨迹问题，而坐标系在阿波罗尼奥斯的圆锥曲线论中已见端倪；射影几何的萌芽散见于各家的著作中；德谟克利特的原子论和阿基米德的“方法”更孕育着近代积分论的思想；柯西、外尔斯特拉斯的 ε-δ 方法又和希腊数学常用的“穷竭法”惊人地相似. 希腊数学的博大精深，影响久远，由此可见一斑.

自然会产生这样的问题：希腊数学繁荣的原因是什么？以后又为什么衰退？这是数学史或整个文化史的重大问题. 历史的研究，无非是总结经验教训，探索发展规律，指导当前工作，预测未来进程. 将希腊数学兴旺发达的原因研究清楚，不但有理论的价值，而且有现实意义. 不过问题相当复杂，见仁见智，未有定论. 一般的历史书认为“奴隶制经济的发展，及城邦(如雅典)政权的民主化，为文化事业的繁荣创造了条件”[1]. 用生产力的提高和政治上的民主来解释，这基本上是共同的看法，然而进一步推敲，就出现了分歧. 因为生产力的高低，未必和科学的发达程度同步. 例如

---

1) 《世界历史词典》，上海辞书出版社，1985，p. 327.

罗马时代的生产力不低于希腊，但科学(特别是数学)的成就和希腊相比却有天壤之别．也有人认为奴隶包揽全部劳动，奴隶主才有闲暇去研究学问，然而罗马的奴隶主并不去研究学问而是挥霍财富，追求个人享乐．富家多纨袴子弟，较艰苦的环境反而能锻炼人材，这是一般常识．因此还要作具体的分析，试分述如下：

（一）工商业发达．科学的发展要有一定的条件，首先要有生产和社会的需要，但生产方式不同会有不同的后果．和罗马相比，希腊的工商业及海上贸易比较发达，希腊本土和腓尼基、巴比伦、埃及的商旅交往不断．泰勒斯早年就是商人，毕达哥拉斯也曾通过商旅到过东方，接触这些文明古国，吸收他们积累下来的经验和文化．罗马则以农业、畜牧生产为主，商业及海上贸易水平甚低，长期封闭于意大利半岛的范围，不易吸取外来的知识．农民有保守、安分守己、不思变化等特点，少与外界联系．而商人好冒险，较进取和活跃，对新事物敏感．文化中心亚历山大是各族人民群居之所，他们对异族人不排外，善于博取众长，为己所用，因此进步很快．

（二）政治民主和思想自由．科学的进步，必定不断出现新的思想，新的理论，这些尚处于萌芽状态的新鲜事物，要在反复的讨论、争辩和通过实践考验的过程中才能成长起来，经不起考验的被淘汰，不完善的可以补充改造．这就要有自由的气氛，允许自由发表意见．因此就必须要有政治上的民主．

科学与民主历来就是共存的．我国“五四”运动提出要“科学与民主”，是很英明的．

从公元前 6 世纪起，雅典就确立了自由民的民主制度，国王由世袭改为选举产生，城邦的首脑是一年一任的执政官．特别是经过几次重大的政治改革：梭伦(Solon，公元前 594年)改革、克利斯提尼(Cleisthenes of Athens，公元前 509 年)改革、伯里克利(Pericles，公元前 444年)改革，学术获得空前的发展．自然科学、社会科学、文学艺术都处在当时世界的顶峰．他们提出“在真理面前人人平等”，至今仍是一个响亮的口号．

希腊没有特殊的祭司阶层，没有必须遵守的教条，没有至高无上的神权的束缚，因此有相当程度的思想自由。这有助于科学和哲学从宗教分离开来，这一点是埃及、巴比伦所达不到的。他们崇尚公开性，可以到处讲学，兴办学校（如柏拉图、亚里士多德），逐渐形成一个以治学为职业的知识分子阶层，学术著作多出自他们之手。这一方面在亚历山大时期表现得更加突出。

我国春秋战国时代可与之媲美，那时私学盛行，从孔子的儒家学派开始，形成一个职业的知识阶层，以后出现诸子蜂起，百家争鸣的繁荣景象。秦始皇焚书坑儒，实行愚民政策，于是结束了百家争鸣的局面，他的王朝也随着垮台。

（三）国家实行鼓励学术和尊重学者的政策。这在亚历山大时期得到充分的体现。托勒密一世本人就很好学，他和后几代的统治者都提倡学术，从各地招致一大批学者，由国家提供生活和科研的资助，使他们在和平的环境中安心工作。于是出现文化的昌盛。

历史证明国家的政策对科学的发展往往起到决定性的作用。例如 8—9 世纪阿拉伯国家的哈里发奖励学术研究，采取开放政策，吸收东西方文化，出现了以巴格达为首的学术中心，为世界数学宝库增加了光采。

16—17 世纪的欧洲，尊重学者成为一种风尚，1705 年牛顿受英国女王封为爵士，女王和王子特地步行到剑桥大学参加授爵典礼，以示重视。俄国沙皇为了提倡学术，在 1727 年和 1766 年两次敦聘欧拉到彼得堡讲学，优礼有加。

17 世纪以后欧洲数学突飞猛进，这当然和资本主义日益增长的生产力有关。但高度发展的生产力未必带来正确的科学政策和知识分子政策。1933 年希特勒上台，大批学者被迫害致死，爱因斯坦出走美国，德国的数学中心格丁根受到沉重打击以致瘫痪，这是最触目惊心的反面例子。

（四）其他原因。还可以举出一些原因，如对自然界的理性主义观点，有助于摆脱宗教和神话的羁绊。创造了拼音文字，使学术

易于交流等等。

希腊数学着重推理、证明，主要的成就在几何方面。但希腊的体系也有局限性。他们坚持清晰的定义、严格的论证、演绎的体系，这是优点。但优点有时也会变成缺点，变成妨碍他们大胆接受新事物的框框。例如，他们很早就出现了不可通约量，但始终不承认无理数是数。又为了逻辑的严密性，给代数也披上几何的外衣。把数看成线段的长，数的平方和立方看作面积和体积，而高于三次的幂无法作几何解释，于是便极力回避。另一方面，为了保持几何的"纯洁性"，不从实际问题中吸取营养。而新思想新概念的出现，往往带有逻辑上的困难，他们又拒绝接受，这就在很大程度上堵塞了发明创造的道路。4—5世纪，希腊几何实际已成强弩之末。公元641年图书馆再度被焚，最后迫使希腊数学衰亡。